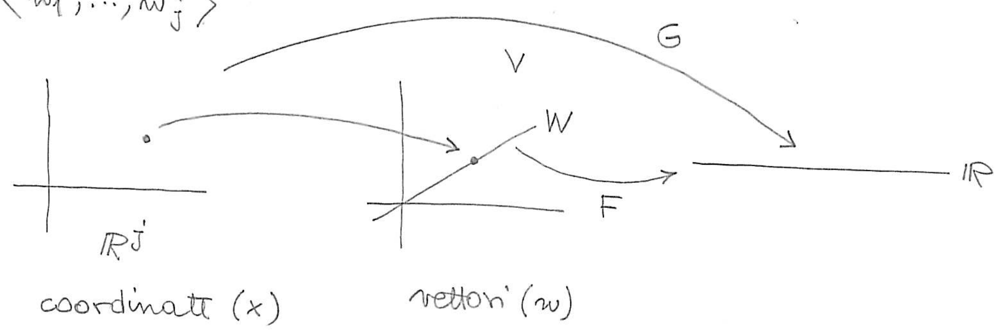
<u>Oss</u> (versione analitica del pb dei minimi quadrati):

- V sp vett su $\mathbb{R}$ con ps, $v \in V$
- W ssv di V con $\dim W < +\infty$
- $F : W \to \mathbb{R}$ t.c. $F(w) = \| v - w \|^2$

(1) <u>TEO</u> $\Rightarrow$ la funz F ha minimo (assoluto) in v^* pr ort di v su W

(2) $W = \langle w_1, \dots, w_j \rangle$



$G : \mathbb{R}^j \to \mathbb{R}$ t.c. $G(x) = F(x_1 w_1 + \dots + x_j w_j)$

- v^* minimo di F
- x^* t.c. $x^*_1 w_1 + \dots + x^*_j w_j = v^* \Rightarrow x^*$ minimo di G

  $\left[x \neq x^* \Rightarrow G(x) = F(x_1 w_1 + \dots + x_j w_j) \geq F(v^*) = G(x^*) \right]$

- SE $w_1, \dots, w_j$ BASE, x^* <u>unico</u> elem di $\mathbb{R}^j$ che rende minima G, ALTRIMENTI $\exists$ infiniti elem di $\mathbb{R}^j$ che …

<u>Oss</u>: V, v come sopra, $W = \langle w_1, \dots, w_j \rangle$ s.s.v di V.

- v^* pr ort di v su $W \Leftrightarrow v - v^* \perp W$

  ovvero $\Leftrightarrow \forall s = 1, \dots, j : (v - v^*) \cdot w_s = 0$ cioè: $v^* \cdot w_s = v \cdot w_s$

- le coord di v^* sono dunque individuate da:

$$a_1 w_1 + \dots + a_j w_j = v^* \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \end{bmatrix} \text{ soluz del sist } \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \cdot w_1 & \cdots & w_j \cdot w_1 \\ \vdots & & \vdots \\ w_1 \cdot w_j & \cdots & w_j \cdot w_j \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} v \cdot w_1 \\ \vdots \\ v \cdot w_j \end{bmatrix}}_{\text{EQUAZIONI NORMALI}}$$

<u>Oss</u>: la matr del sist è SIMMETRICA.

<u>Oss</u>: $A = (a_1, \dots, a_j) \in \mathbb{R}^{n \times j}$, $n \geq j$, $b \in \mathbb{R}^n$

- $V = \mathbb{R}^n$ con ps canonico, $v = b$
- $W = \langle a_1, \dots, a_j \rangle \subset \mathbb{R}^n$
- l'elemento di W migliore appross di $v = b$ nel senso dei m.q. è la pr ort di b su W
- le coord della pr ort di b su W sono <u>tutte</u> le colonne soluz del sist delle eq normali:

$$(A^T A)\, x = A^T b$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_1 & \cdots & a_j \cdot a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1 \cdot a_j & \cdots & a_j \cdot a_j \end{bmatrix} \qquad A^T b = \begin{bmatrix} b \cdot a_1 \\ \vdots \\ b \cdot a_j \end{bmatrix}$$

RICORDARE che: $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \cdot b = b^T a$

- la matr $A^T A$ è simmetrica <u>semidef positiva</u> $(\forall v \in \mathbb{R}^j,\ A^T A v \cdot v \geq 0)$
- SE colonne di A lin indip ALLORA è <u>def positiva</u> ($\Rightarrow$ invertibile)

<u>Es</u>: $V = \mathbb{R}^3$ con ps canonico, $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

- eq normali
- soluz delle eq normali
- migliore appross di v in W nel senso dei m.q

(<u>Sol</u>: …)

<u>Es</u>: V, v come nell'Es precedente; $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

- eq normali e soluz
- migliore appross …

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- verif che $Ax = b$ non ha soluz
- soluz di $Ax = b$ nel senso dei m.q.
- soluz di $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ nel senso dei m.q.

  (Oss: sist equivalenti, ma ...)