def (migliore appross in spazi con ps):

- V sp vett su $\mathbb{R}$ con ps ; $\forall v \in V$, $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$
- W ssv di V con $\dim W < +\infty$
- $v \in V$

$\boxed{w \in W \text{ è una migliore appross di } v \text{ in } W \text{ se: } \forall w' \in W,\ \|v - w\| \leq \|v - w'\|}$

Oss: def equivalente:

$$\forall w' \in W, \quad \|v - w\|^2 \leq \|v - w'\|^2$$

TEO: V, W, v come nella def; esiste una sola migliore appross di v in W: la proiez ortogonale di v su W.

Oss: v^* è pr ort di v su W significa $v - v^* \perp W$ ovvero: $\boxed{\forall w \in W,\ (v - v^*) \cdot w = 0}$.

---

dim: v^* pr ort di v su W, $w' \in W$:

$$\|v - w'\|^2 = \|\underbrace{v - v^*}_{\perp W} + \underbrace{v^* - w'}_{\in W}\|^2 = \|v - v^*\|^2 + \|v^* - w'\|^2$$

Oss: $a \in W$, $b \perp W \Rightarrow \|a+b\|^2 = (a+b)\cdot(a+b)$
$= a \cdot a + \cancel{a \cdot b} + \cancel{b \cdot a} + b \cdot b = \|a\|^2 + \|b\|^2$
(Teo di Pitagora)

da cui:

- $\forall w' \in W$, $\|v - w'\|^2 \geq \|v - v^*\|^2$
- $\|v - w'\|^2 = \|v - v^*\|^2 \Leftrightarrow w' = v^*$

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 2{,}4 \end{bmatrix}$;

- $V = \mathbb{R}^3$ con ps canonico
- $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle$, $\dim W = 2$
- $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 2{,}4 \end{bmatrix} = b$

$\boxed{\text{la migliore appross di } v \text{ in } W \text{ è } v^* \in W \text{ tale che } \forall w' \in W,\ \|v - v^*\|^2 \leq \|v - w'\|^2}$

MA: $W = \{ Ax \in \mathbb{R}^3,\ x \in \mathbb{R}^2 \}$

dunque la condiz precedente equivale a

i coefficienti della migliore appross di v in W sono le $x^* \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \|b - Ax^*\|^2 \leq \|b - Ax\|^2$$

ovvero le soluz del sist $Ax = b$ nel senso dei m.q.

TEO $\Rightarrow$ esistono soluz di $Ax = b$ nel senso dei m.q;

- una sola se e solo se colonne di A lin indip
- infinite se colonne di A lin dip