Oss: $[a,b]\subset\mathbb{R}$; $t_0,\dots,t_k\in[a,b]$ distinti...; $I_1,\dots,I_k$ ...

$$S=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\ ,\ \text{continue lin a tratti su } I_1,\dots,I_k\}$$

(A) S è sottosp vett di $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ (dim ...)

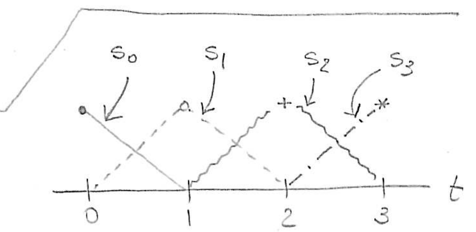
(B) $\forall\, y_0,\dots,y_k\in\mathbb{R}$, $\exists$ un solo elem di S che interpola i dati $(t_0,y_0),\dots,(t_k,y_k)$

[dim: $\forall j\ \exists!\ p_j\in P_1(\mathbb{R})$ che interpola $(t_{j-1},y_{j-1}),(t_j,y_j)$, e la f risulta cont su $[a,b]$.]

(C) $s_0,\dots,s_k\in S$ t.c. $s_j(t_i)=\begin{cases}1 & \text{se } i=j\\ 0 & \text{se } i\neq j\end{cases}$

- $s_0,\dots,s_k$ sono base di S (dim ...)
- $\dim S = k+1$

Es: $[0,3]$; $I_1=[0,1]$, $I_2=[1,2]$, $I_3=[2,3]$



- determ $\sigma\in S$ che int i dati $(0,2),(1,-6),(2,0),(3,-1)$.

Oss (ricostr mediante f cont lin a tratti)

$[a,b]$, $a=t_0,\dots,t_k=b$, S f cont lin a tratti su $I_1=[t_0,t_1],\dots$

- $r:\mathbb{R}^{k+1}\to\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ t.c. $r:\begin{bmatrix}y_0\\ \vdots\\ y_k\end{bmatrix}\to$ l'elem di S che int $(t_0,y_0),\dots(t_k,y_k)$

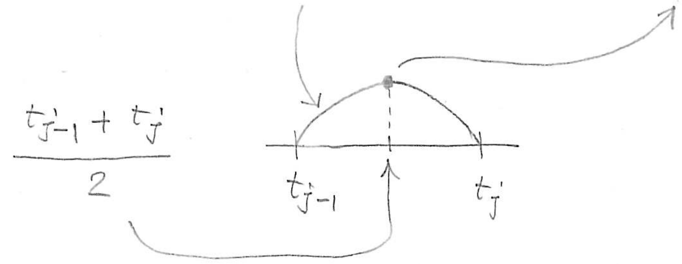
(1) r è f di ricostr rel a c (dim ...)

(2) $f\in\mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$, $M_2=\max\{\,|f^{(2)}(t)|,\ t\in[a,b]\}$

$\forall\, t\in I_j$, $|f(t)-r(c(f))(t)| = |f(t)-p_j(t)| \leq$ usando teo err ricostr int polinomiale

p_j: l'elem di $P_1(\mathbb{R})$ che int $(t_{j-1},f(t_{j-1})),(t_j,f(t_j))$

$$\leq \frac{M_2}{2}\,|t-t_{j-1}|\,|t-t_j| \leq \frac{M_2}{2}\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{2}\right)^2$$



$\Rightarrow$ posto $h(k)=\max\{t_1-t_0,\ t_2-t_1,\dots,\ t_k-t_{k-1}\}$

si ha: $\boxed{e(f)\leq \frac{M_2}{8}\,h(k)^2}$

Oss: $\forall f\in\mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$: se strategia di scelta degli ist di camp è t.c. $\lim_{k\to\infty} h(k)=0$ allora $\lim_{k\to\infty} e(f)=0$

Es:
- $t_j = a+\frac{b-a}{k}\,j$, $j=0,\dots,k$

  $h(k)=\frac{b-a}{k} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} h(k)=0$
- $[a,b]=[0,1]$, $t_j=\frac{j}{j+1}$, $j=0,\dots,k-1$, $t_k=1$

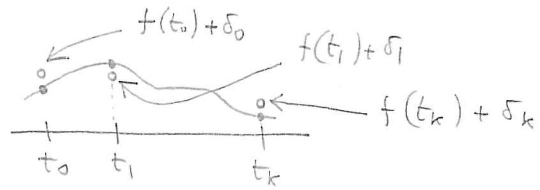
  $h(k)=1/2 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} h(k)\neq 0$

Oss (condiz del pb della ricostruzione):

$[a,b]$; $t_0,\dots,t_k$; c f di camp; r f di ricostr

$\delta_0,\dots,\delta_k\in\mathbb{R}$; $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

- $\hat{r}(t) = r(c(f)+\delta)$



- $\underbrace{|\hat{r}(t)-r(c(f))|}_{\text{errore assoluto, all'ist } t\text{, commesso ricostruendo dati "errati"}} = |r(\delta)|$

(A) ricostr con int polin :

base di Lagrange di $P_k(\mathbb{R})$

$$|r(\delta)| = |\delta_0 \ell_0(t) + \dots + \delta_k \ell_k(t)|$$

$$\leq |\delta_0|\,|\ell_0(t)| + \dots + |\delta_k|\,|\ell_k(t)|$$

$$\leq \max\{|\delta_0|, \dots, |\delta_k|\} \underbrace{\left(|\ell_0(t)| + \dots + |\ell_k(t)|\right)}$$

$$\max\{|\ell_0(t)| + \dots + |\ell_k(t)|,\ t \in [a,b]\}$$

$$\geq C \log k$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Oss: } \exists\, t \in [a,b], \\ \delta_0, \dots, \delta_k \in \mathbb{R} \text{ t.c.} \\ |r(\delta)| = \max|\delta_j| \max\{|\ell_0| + \dots + |\ell_k|\} \end{array}}$$

(B) ricostr con f cont lin a tratti :

base di S ...

$$|r(\delta)| = |\delta_0 s_0(t) + \dots + \delta_k s_k(t)|$$

$$\leq |\delta_0|\,|s_0(t)| + \dots + |\delta_k|\,|s_k(t)| \leq \max\{|\delta_0|, \dots, |\delta_k|\}$$

$$\boxed{|s_0(t)| + \dots + |s_k(t)| = s_0(t) + \dots + s_k(t) = 1}$$

OVVERO :

Nel caso di ricostr con int polinomiale il condiz è tanto peggiore quanto più k è grande; nel caso di ricostr con f cont lin a tratti il condiz è sempre buono.