CN 41 42 23 novembre 2009 / B32

Pb (lineare di interp)

dati • $[a,b]$, k; $\mathcal{F}$; $L_0, \dots, L_k : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$; $y_0, \dots, y_k$

determ • $f \in \mathcal{F}$ t.c. $L_0(f) = y_0, \dots, L_k(f) = y_k$

Es: (I) Pb interp polinomiale;

(II) determ $x \in \mathcal{C}^2$ t.c. $\begin{cases} x'' + x' = 0 \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_0' \end{cases}$ $(x_0, x_0' \in \mathbb{R})$

- $[a,b] = \mathbb{R}$, $k = 1$;
- $\mathcal{F} = \{ v \in \mathcal{C}^2 \text{ t.c. } v'' + v' = 0 \} = \langle 1, e^{-t} \rangle$ $(\dim \mathcal{F} = 2)$
- $L_0 : f \to f(0)$, $L_1 : f \to f'(0)$ (sono lineari)
- $y_0 = x_0$, $y_1 = x_0'$

(Soluz: ...)

(III) determ $x \in \mathcal{C}^2$ t.c. $\begin{cases} x'' + x = 0 \\ x(0) = 0, \quad x(2\pi) = 0 \end{cases}$

- $[a,b] = \mathbb{R}$, $k = 1$;
- $\mathcal{F} = \{ \dots \} = \langle \operatorname{sen} t, \cos t \rangle$
- $L_0 : f \to f(0)$, $L_1 : f \to f(2\pi)$
- $y_0 = 0$, $y_1 = 0$

(Soluz ...)

Oss: in generale: • $\mathcal{F} = \langle f_1(t), \dots, f_j(t) \rangle$

- $L_0(f) = y_0, \dots, L_k(f) = y_k$ equiv a $(f(t) = a_1 f_1(t) + \dots + a_j f_j(t))$

$$\begin{bmatrix} L_0(f_1) & \cdots & L_0(f_j) \\ \vdots & & \vdots \\ L_k(f_1) & \cdots & L_k(f_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} \qquad (*)$$

- se $f_1, \dots, f_j$ base di $\mathcal{F}$, la corrisp soluz pb lin interp $\rightleftarrows$ soluz sist lin $(*)$ è biunivoca.

Es (per casa): determ $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ che verificano le condiz: $p(1) = 2$, $\int_0^6 p(x)\,dx = 0$

Sol: $\{ (3+9t) - (1+11t)x + 2t x^2, \ t \in \mathbb{R} \}$

• CAMPIONAMENTO e RICOSTRUZIONE

---

def (f. di camp, f. di ricostruz):

dati k intero ≥ 0; $[a,b]$ int non deg, $\overbrace{t_0, \dots, t_k}^{\text{distinti}} \in [a,b]$

- $c : \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{k+1}$ t.c. $c(f) = (f(t_0), \dots, f(t_k))^T$

FUNZ di CAMPIONAMENTO (agli istanti $t_0, \dots, t_k$)

ISTANTI di CAMPIONAMENTO

Oss: c è lineare e non invertibile

$[\exists f_1 \neq f_2 \text{ t.c. } c(f_1) = c(f_2)]$

- $r : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$

FUNZ di RICOSTRUZ (rel a c) SE
- lineare
- $\forall y \in \mathbb{R}^{k+1}$, $c(r(y)) = y$

Es (ricostruz mediante interp poli):

$r : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ t.c. $r : \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} \to$ l'elem di $\mathcal{P}_k(\mathbb{R})$ che int i dati $(t_0, y_0), \dots, (t_k, y_k)$

- r è f. di ricostruz rel a c

(dim: ...)

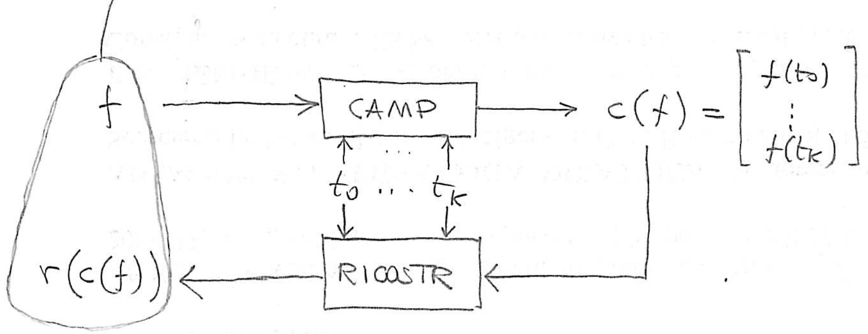
__def__ (err di ricostruzione): $[a,b]$ int non degenere ;

$t_0, \dots, t_k$ ist di camp ; c f di camp ; r f di ricostruz

$e : \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ t.c.

$$e(f) = \max_{[a,b]} \left| f(t) - r(c(f))(t) \right|$$

ERRORE di RICOSTRUZIONE



__TEO__ (errore di ricostr dell' int polinomiale)

k int ≥ 0; $t_0, \dots, t_k \in [a,b]$, distinti;

$f \in \mathcal{C}^{k+1}([a,b], \mathbb{R})$; $p_k \in \mathbb{P}_k(\mathbb{R})$ che int i dati $(t_j, f(t_j))$

$\forall\, t \in [a,b]$, $\exists\, \theta \in [a,b]$ t.c.

$$f(t) - p_k(t) = \frac{f^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!} (t - t_0) \cdots (t - t_k)$$

(__dim__: no.)