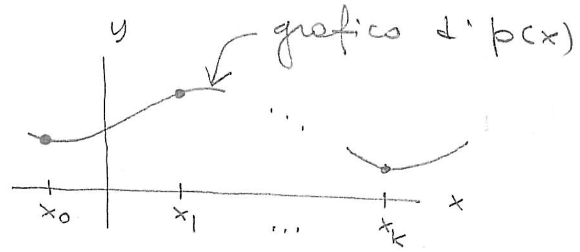
3 INTERPOLAZIONE

Pb (dell'interpolazione polinomiale):

dati
- k intero ≥ 0
- $P_k(\mathbb{R})$ = ins dei polin a coeff in $\mathbb{R}$, di grado $\leq k$ (sottosp vett delle f continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$)
- $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{R}$, distinti
- $y_0, \dots, y_k \in \mathbb{R}$

determ $p \in P_k(\mathbb{R})$ t.c. $p(x_0) = y_0, \dots, p(x_k) = y_k$
("che interpola i dati $(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$")

- int geometrica:



Assegnati $k+1$ punti — di coord $(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$ — determ $p \in P_k(\mathbb{R})$ il cui grafico contiene i punti.

Es: $k = 2$, dati $(-1, 0), (0, 1), (2, -2)$

- $-x^2 + 6x + 1$ non è soluz del Pb ...
- $P_2(\mathbb{R}) = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \,;\ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$ ← RAPPRESENTAZ PARAMETRICA di $P_2(\mathbb{R})$

Riformulaz del Pb: cerco $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ t.c. il polin individuato verifichi le tre condiz
$$p(-1) = 0, \quad p(0) = 1, \quad p(2) = -2$$

OVVERO che risolvono il sist di eq lin:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

> **Oss**: a_0, a_1, a_2 soluzione del sistema
> $\Updownarrow$
> $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ soluzione del Pb di interp polin

Oss: $P_k(\mathbb{R}) = \langle q_0(x), \dots, q_k(x) \rangle$ (Ad es: $P_2(\mathbb{R}) = \langle 1, x, x^2 \rangle$)

cioè $P_k(\mathbb{R}) = \{ a_0 q_0(x) + \dots + a_k q_k(x) \,;\ a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R} \}$

ALLORA $\alpha_0 q_0(x) + \dots + \alpha_k q_k(x)$ risolve il Pb di interp

$\Leftrightarrow$ $(\alpha_0, \dots, \alpha_k)^T$ risolve il sist di eq. lineari

$$\begin{bmatrix} q_0(x_0) & q_1(x_0) & \dots & q_k(x_0) \\ \vdots & & & \\ q_0(x_k) & q_1(x_k) & \dots & q_k(x_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$$

> **TEO** (esist ed unicità della soluz)
> $\forall k;\ x_0, \dots, x_k;\ y_0, \dots, y_k$
> $\exists !\ p \in P_k(\mathbb{R})$ che risolve il Pb dell'int polinom
> (dim: ... con base di Lagrange)

Es: determ l'elem di $P_2(\mathbb{R})$ che int i dati $(-1, 0), (0, 1), (2, -2)$ ...

A) ... usando base Lagrange
B) ... usando base Vandermonde

e verif che i polin trovati sono uguali.

Oss: basi diverse in $P_k(\mathbb{R}) \Rightarrow$ FORME diverse del p. che interpola.

Oss: $k=2$

- $P_2(\mathbb{R}) = \langle \ell_0, \ell_1, \ell_2 \rangle$: base e forma di LAGRANGE (matr identica)
- $P_2(\mathbb{R}) = \langle 1, x, x^2 \rangle$: base e forma di VANDERMONDE (matr di V.)
- $P_2(\mathbb{R}) = \langle 1, x-x_0, (x-x_0)(x-x_1) \rangle$: base e forma di NEWTON (matr tr inf)

Es: dati $(0,1), (-1,2), (3,10), (1,10)$

- determ la f di Newt del p che interpola ("interpolante")
- (per casa) stessa cosa per dati permutati: $(3,10), (-1,2), (1,10), (0,1)$

Pb (lineare di interp)

dati
- $[a,b] \subset \mathbb{R}$ non degenere, k intero ≥ 0
- $\mathcal{F}$ s.s.v delle f cont da $[a,b]$ in $\mathbb{R}$
  con $\dim \mathcal{F} = j$, $0 < j < +\infty$
- $L_0, \dots, L_k : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ lineari $(k+1)$
- $y_0, \dots, y_k \in \mathbb{R}$

determ $f \in \mathcal{F}$ t.c. $L_0(f) = y_0, \dots, L_k(f) = y_k$

Es: (I) un pb di interp polin è IL pb lin di interp t.c $[a,b] = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = P_k(\mathbb{R})$, $L_i(p) = p(x_i)$

[Es per casa: verif che $L_i : P_k(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è lin]

(II) determ $x \in C^2$ t.c. $\begin{cases} x'' - x' = 0 \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_0' \quad (x_0, x_0' \in \mathbb{R}) \end{cases}$

- $[a,b] = \mathbb{R}$, $k = 1$
- $\mathcal{F} = \{ v \in C^2 \text{ t.c. } v'' - v' = 0 \} = \langle 1, e^t \rangle$ [$\Rightarrow j = 2$]
- $L_0(f) = f(0)$, $L_1(f) = f'(0)$ [sono lineari]
- $y_0 = x_0$, $y_1 = x_0'$

(III) determ $x \in C^2$ t.c. $\begin{cases} x'' + x = 0 \\ x(0) = 0, \quad x(2\pi) = 0 \end{cases}$

- $[a,b] = \mathbb{R}$, $k = 1$
- $\mathcal{F} = \{ v \in C^2 \text{ t.c. } v'' + v = 0 \} = \langle \sin x, \cos x \rangle$ [$j = 2$]
- $L_0(f) = f(0)$, $L_1(f) = f(2\pi)$ [sono lineari]
- $y_0 = 0$, $y_1 = 0$