

Oss (uso QR per soluz sist): $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{R}^n$

(1) $(U, T) = QR(A)$

(2) $c = U^T b$

(3) $x = SI(T, c)$

procedura SODDISFACENTE:

SE A invert, TROVA x

SE A non invert, SI ARRESTA

- da fare:
- CONDIZIONAMENTO
 - studio in $F(2,53)$
 - COSTO

Preliminare: norme in \mathbb{R}^n e norme di matrici

già noto: \mathbb{R}^n sp vett su \mathbb{R} con p.s. canonico

$N: v \rightarrow \sqrt{v \cdot v} = \|v\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$

- NORMA EUCLIDEA di v , $\|v\|_2$, $N_2(v)$

def (norma, sp normato)

V sp vett su \mathbb{R} , $N: V \rightarrow \mathbb{R}$ norma in V se:

(N1) $\forall v \in V: N(v) \geq 0$ e $N(v) = 0 \Rightarrow v = 0$

(N2) $\forall v \in V, \alpha \in \mathbb{R}: N(\alpha v) = |\alpha| N(v)$

(N3) $\forall v, w \in V: N(v+w) \leq N(v) + N(w)$ [disug triangolari...]

(V, N) s' dice SPAZIO NORMATO

Es (altre norme in \mathbb{R}^n): $N_1: v \rightarrow |v_1| + \dots + |v_n| = \|v\|_1$

$N_\infty: v \rightarrow \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\} = \|v\|_\infty$

Es (1) verif che N_1 è norma (Sol: ...)

(2) per caso: verif che N_∞ è norma

Oss: N_1, N_∞ non derivano da p.s in \mathbb{R}^n
(dim: Oss 0.37, p. 14)

def (intorno sferico): $J_N(v, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid N(x-v) \leq r\}$
 |
 L RAGGIO
 CENTRO

Es: disegnare $J_N(0, 1)$ in \mathbb{R}^2 per $N_1, N_2, N_\infty \dots$

def (norma di matrice): Si cons \mathbb{R}^n con norme N ; $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$\|A\|_N = \sup \left\{ \frac{N(Av)}{N(v)}, v \neq 0 \right\}$ norma di A
 INDOTA da N

Es: \mathbb{R}^n, N ; $\|I\|_N = 1$

Oss: $\sup \{ \# \} < +\infty$

Es: $N_\infty(Av) \leq [N_\infty(a_1) + \dots] N_\infty(v)$

Oss: (formule di calcolo):

$N_1(A) = \max\{N_1(a_1), \dots, N_1(a_n)\} = \|A\|_1$

$N_\infty(A) = \max\{N_1(r_1^T), \dots, N_1(r_m^T)\} = \|A\|_\infty (= \|A^T\|_1)$

$N_2(A) = \sqrt{\max\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \text{ autovalore di } ATA\}}$

Oss: ATA è simm semidef pos \Rightarrow autov ≥ 0

Es: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\bullet \|A\|_1 = \max\{3, 2\} = 3$

$\bullet \|A\|_\infty = \max\{4, 1\} = 4$

$\bullet ATA = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ SDP; $\|A\|_2 = \sqrt{\max\{\lambda_1, \lambda_2\}}$