Es: $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3\times3}$ t.c. $A(x) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & x & x \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix}$;

determ x t.c. $A(x)$ risulta DP. (Sol. ...)

- COSA FARE se EG non def in A

Es (pivoting): $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

def: $P(i,j)$ è la matr di perm che scambia riga i con riga j

- $A^{(1)} = A$; $A^{(2)} = H_1 \underbrace{\boxed{P(1,2)}}_{P_1} A^{(1)}$; $A^{(3)} = H_2 \underbrace{\boxed{P(2,3)}}_{P_2} A^{(2)}$ è tr sup...

  ... q. di: $A^{(3)} = [H_2 P_2 H_1 P_1] A$

  ... ovvero: $A = [P_1^T H_1^{-1} P_2^T H_2^{-1}] A^{(3)}$

  MA: $[\dots]$ non è tr inf con 1 sulla diag! (*)

- $P \overset{def}{=} P_2 P_1$ allora: $P[\dots]$ è tr inf con 1 sulla diag ... (**)
- $\boxed{S = P[\dots],\ D = A^{(3)} \text{ è fatt LR di } PA}$
- $\boxed{A = P^T S D}$

Es (per casa): verif (*) e (**)

- $(P, S, D) = EGP(A)$

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; EGP non def in A!

TEO (nus def EGP): $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$;

EGP def in A $\Leftrightarrow$ $a_1, \dots, a_{n-1}$ lin indip

(dim: no)

Oss (uso EG/EGP per soluz sist): $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$;

- (1) $(S, D) = EG(A)$
  (2) $c = SA(S, b)$
  (3) $x = SI(D, c)$

procedura NON SODDISFACENTE, in generale:
SE passo (1) ok, ALLORA trova x $\Leftrightarrow$ A invert
MA passo (1) può fallire anche se A invert!

- (1) $(P; S, D) = EGP(A)$
  (2) $c = SA(S, Pb)$
  (3) $x = SI(D, c)$

procedura SODDISFACENTE:
- passo (1) può fallire SOLO SE A non invert

SE A invert, TROVA soluz
SE A non invert, si ARRESTA

Oss (unicità EGP): $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

(A) $P_1 = P(1,2), \dots$
(B) $P_1 = P(1,3), \dots$

Es: completare EGP e confrontare i fattori ottenuti.

- FATTORIZZAZIONE QR

def: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; $U, T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ t.c. ...

Es (procedim di calcolo): $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

PASSO 1: determ $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{R}^{3\times3}$ a colonne ortogonali e $\Theta \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tr sup con $\theta_{kk} = 1$ t.c. $\Omega\Theta = A$

- $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \begin{bmatrix} 1 & \theta_{12} & \theta_{13} \\ 0 & 1 & \theta_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \omega_1 \theta_{12} + \omega_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \omega_1 \theta_{13} + \omega_2 \theta_{23} + \omega_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\omega_1 = \ldots$$

$$\theta_{12} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \omega_1}{\|\omega_1\|^2}, \quad \omega_2 = \ldots$$

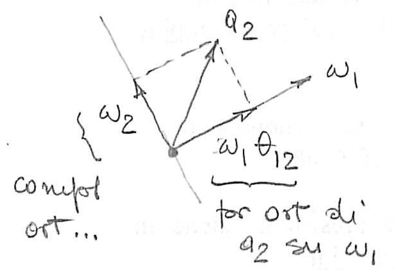
$$\theta_{13} = \frac{\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \omega_1}{\|\omega_1\|^2}, \quad \theta_{23} = \frac{\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \omega_2}{\|\omega_2\|^2}, \quad \omega_3 = \ldots$$

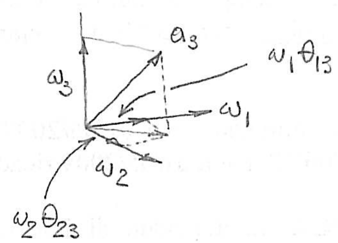
PASSO 2 : $W = \mathrm{diag}(\|\omega_1\|, \|\omega_2\|, \|\omega_3\|)$

- ΩW^{-1} è ortogonale
- $W\theta$ è tr sup
- $(\Omega W^{-1})(W\theta) = A$

quindi : $\boxed{U = \Omega W^{-1}, \ T = W\theta \text{ è fatt QR di } A}$

Oss (analogia con proc ortonorm Gram-Schmidt):





TEO (esistenza fatt QR): $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, invertibile.

$\exists$ fatt QR di A, ed il proc descritto sopra ne trova una.

(dim: no)