CARATTERIZZ matrici SDP

Oss: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, SDP. Allora la fatt LR di A è t.c.

(I) $D = \mathrm{diag}(d_{11}, \dots, d_{nn})\, S^T$

(II) $d_{11} > 0, \dots, d_{nn} > 0$ $[\Rightarrow \det A > 0]$ (dim: ...)

Oss: A simmetrica. Se $(S, D) = EG(A)$ [EG è def in A] e $d_{11} > 0, \dots, d_{nn} > 0$ allora A è SDP.

(dim: ...)

TEO (caratt matrici SDP):

A simmetrica. SDP $\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{EG def in } A \text{ e } (S,D) = EG(A) \text{ con } d_{11} > 0, \dots, d_{nn} > 0}$ (1)

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\det A[k] > 0 \text{ per } k = 1, \dots, n}$ (2)

dim: SDP $\Leftrightarrow$ (1) segue dalle Oss precedenti;

SDP $\Rightarrow$ (2) da PROPRIETA' (I) lez precedenti $\oplus$ (II) Oss prec;

(2) $\Rightarrow$ SDP perché (2) $\Rightarrow$ (1) ...

(*)

Es: $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ t.c. $A(x) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & x & x \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix}$

determ per quali $x \in \mathbb{R}$ la matrice $A(x)$ risulta SDP

(*)

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\exists L \text{ tr inf con } l_{kk} > 0,\ k = 1, \dots, n \text{ t.c. } A = LL^T}$ (3)

dim: SDP $\Rightarrow$ (3) da Oss (I) e poi $A = \underbrace{S\sqrt{\mathrm{diag}(d_{11} \cdots d_{nn})}}_{L}\sqrt{\dots}\ S^T$

(3) $\Rightarrow$ SDP dalle def ...