Classi di matrici per le quali EG è def ($\Rightarrow \exists!$ fatt LR)

- PDF: a Predominanza Diagonale Forte
- SDP: Simmetriche Definite Positive

① PDF

def: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è PDF se

- $|a_{kk}| > \sum_{i\neq k} |a_{ki}|$, $k=1,\dots,n$ (per RIGHE)
- $|a_{kk}| > \sum_{i\neq k} |a_{ik}|$, $k=1,\dots,n$ (per COLONNE)

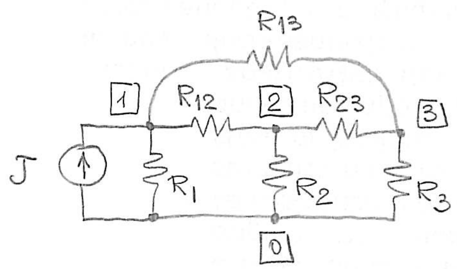
Es:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$ PDF per r, non per c

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$ PDF per r e per c

Oss: A è PDF $\Rightarrow$ $a_{kk} \neq 0$ per $k=1,\dots,n$

Es:



usando LKC:

$$\begin{bmatrix} J \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1+G_{12}+G_{13} & -G_{12} & -G_{13} \\ -G_{12} & G_2+G_{12}+G_{23} & -G_{23} \\ -G_{13} & -G_{23} & G_3+G_{23}+G_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

($G_i = 1/R_i$, $G_{kj} = 1/R_{kj}$, V_i = diff di pot nodo $\boxed{i}$ − nodo $\boxed{0}$)

... la matrice è PDF!

Per casa: la matr non è PDF se una delle R_k è eliminata ma è ancora PDF se, invece, si elimina una delle R_{ik}

PROPRIETÀ

(I) A è PDF $\Rightarrow$ $A[k]$ è PDF per $k=1,\dots,n$

(II) A è PDF $\Rightarrow$ $\det A \neq 0$

(dim: (I) ovvio dalla def; (II) si dim che PDF $\Rightarrow \ker A = \{0\}$ ...)

ALLORA: (I)+(II): A è PDF $\Rightarrow \det A[k] \neq 0$, $k=1,\dots,n-1$
q.d. (Teo ris def EG): EG è def su A

---

② SDP

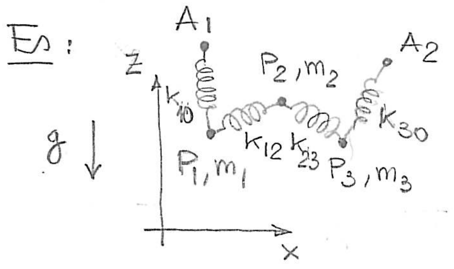
def: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è SDP se
- A è simm ($A^T = A$)
- $\forall v \neq 0$, $Av \cdot v > 0$ (ps canonico)

Es:
- $\alpha I \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ è simm $\forall \alpha$; $v^T \alpha v = \alpha \|v\|^2$ è SDP $\Leftrightarrow \alpha > 0$ (in gen: $\mathrm{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ è SDP $\Leftrightarrow \alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0$)

• $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix} = J \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ è simm; $v^T J v = 2v_1v_2$ e quindi $Jv\cdot v = 0$ per ad es $v = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$: J non è SDP.

Oss: $Ae_k \cdot e_k = e_k^T A e_k = a_{kk}$, perciò: A SDP $\Rightarrow a_{kk} > 0$, $k=1,\dots,n$

Es:



$A_i \equiv (x_i^{(a)}, z_i^{(a)})$

$P_j \equiv (x_j, z_j)$

$k_{ij} > 0$, $g > 0$, $m_j > 0$

Eq. per l'equilibrio (eq di Newton)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_{10}+k_{12} & -k_{12} & 0 \\ -k_{12} & k_{12}+k_{23} & -k_{23} \\ 0 & -k_{23} & k_{30}+k_{23} \end{bmatrix}}_{C \in \mathbb{R}^{3\times 3}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{10}x_1^{(a)} \\ 0 \\ k_{30}x_2^{(a)} \end{bmatrix}$$ EQ.NI LUNGO ASSE x

$$C\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{10}z_1^{(a)} - m_1 g \\ -m_2 g \\ k_{30}z_2^{(a)} - m_3 g \end{bmatrix}$$ EQ.NI LUNGO ASSE Z

Oss: i due sistemi hanno la stessa matrice.

... C è SDP (vero sempre per sist di masse e molle...)

(dim: dalla def: $Cv \cdot v = \dots$)

PROPRIETÀ
(I) A è SDP $\Rightarrow A[k]$ è SDP, $k=1,\dots,n$
(II) A è SDP $\Rightarrow \det A \neq 0$

(dim: (I) no, (II) $Ax = 0 \Rightarrow Ax\cdot x = 0 \dots$)

ALLORA: (I)+(II) A è SDP $\Rightarrow \det A[k] \neq 0$, $k=1,\dots,n-1$
quindi (teo sus def EG): EG è def su A

Oss: