descriz della funzione EG (operando in $\mathbb{R}$)

$(S,D) = EG(A)$

dati: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$;

$A^{(1)} = A$;

per $k = 1,\dots,n-1$ ripeti

se $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ allora

- $H_k = \lambda(a_k^{(k)}, k)$;
- $A^{(k+1)} = H_k A^{(k)}$

altrimenti STOP

uscita: $S = H_1^{-1}\cdots H_{n-1}^{-1}$; $D = A^{(n)}$

Oss: $a_{kk}^{(k)}$ si chiamano PIVOT.

Es: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. $A^{(1)} = A$;

- $k=1$; $a_{11}^{(1)} = 2 \neq 0$; $H_1 = \lambda\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, 1\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$
- $k=2$; $a_{22}^{(2)} = -2 \neq 0$; $H_2 = \lambda\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, 2\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; $A^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$EG(A) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

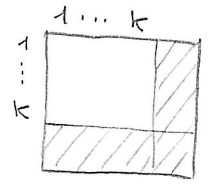
Oss:

- $A^{(n)}$ è tr sup
- H_k^{-1} è tr inf con 1 sulla diag, $k = 1,\dots,n-1$
  $\Rightarrow S = H_1^{-1}\cdots H_{n-1}^{-1}$ è tr inf e $s_{kk} = 1$
- $A^{(n)} = H_{n-1}\cdots H_1 A \Rightarrow A = (H_1^{-1}\cdots H_{n-1}^{-1}) A^{(n)} = SD$
- $d_{kk} = a_{kk}^{(k)}$ (k-esimo pivot)

Pb: non sempre EG è def (Es: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$)

def (minori principali di testa)

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $k \in \{1,\dots,n\}$; $A[k]$ minore di A:



"minore pr di testa di A (di ord k)"

TEO: (cns di def di EG)

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; EG è def in A ($\sim a_{kk}^{(k)} \neq 0$ per $k = 1,\dots,n-1$)

$\Leftrightarrow$ $\det A[k] \neq 0$ per $k = 1,\dots,n-1$

(dim: no)

Es: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ nd/i, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ nd/i, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ d/ni

Oss: il Teo non parla di $A[n]$

Oss: (1) Se S,D è fatt LR di A con $d_{kk} \neq 0$, allora $\exists!$ fatt LR di A (dim: …; vero anche se $d_{nn} = 0$).

ovvero: SE EG def in A ALLORA EG(A) è l'UNICA fatt LR

(2) sia A invert; EG non def in $A \Rightarrow \nexists$ fatt LR di A

dim ($\exists$ fatt LR $\Rightarrow$ EG def in A)

- Sia S,D fatt LR di A;
- A invert $\Rightarrow D$ invert $\Rightarrow d_{kk} \neq 0$ $\forall k$;
- $A = SD \Rightarrow A[k] = S[k]\,D[k]$ (disegnino …) $\Rightarrow \det A[k] = \det D[k]$ $= d_{11}\cdots d_{kk} \neq 0 \Rightarrow$ EG def in A (uso Teo precedente).

Situazioni "grafica":

RELAZIONE EG / fatt LR

	EG def	EG n. def
inv	$\exists!$	$\nexists$
n. inv	$\exists!$	$\exists_\infty$ / $\nexists$

$\mathbb{R}^{n \times n}$

1

2

Es: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\nexists$ fatt

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\exists_\infty$ fatt

---

Es: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $A(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \alpha & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -\alpha \end{bmatrix}$

- determ per quali α EG è def
- discutere $\exists$ fatt LR di $A(\alpha)$

(Sol: EG def su $A(\alpha) \Leftrightarrow \alpha \neq 1/2$; $A(1/2)$ inv $\Rightarrow \nexists$ fatt LR)