Es : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, per determ fatt LR usando la proc di ELIMINAZ di GAUSS :

(1) $A^{(1)} = A$ [r_k riga k-esima della matrice]

(2) $r_1' = r_1$; $r_2' = r_2 + \lambda_{21} r_1$ (λ_{21} t.c. $r_{21}' = 0$) ;
$r_3' = r_3 + \lambda_{31} r_1$ (λ_{31} t.c. $r_{31}' = 0$)

ovvero : $A^{(2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 1 & 0 \\ \lambda_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{H_1} A^{(1)}$

nel caso in esame : $\lambda_{21} = -1$, $\lambda_{31} = -1$

e $A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

(3) $r_1' = r_1$; $r_2' = r_2$; $r_3' = r_3 + \lambda_{32} r_2$ (λ_{32} t.c. $r_{32}' = 0$)

ovvero : $A^{(3)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{32} & 1 \end{bmatrix}}_{H_2} A^{(2)}$

$\lambda_{32} = -2$

e $A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Oss :
- $A^{(3)}$ è tr sup (un candidato fattore destro di fatt LR)
- H_1, H_2 sono tr sup con 1 sulla diag ($\Rightarrow$ invertibili)
- $A^{(3)} = H_2 A^{(2)} = H_2 H_1 A \Rightarrow A = H_1^{-1} H_2^{-1} A^{(3)}$

  e $H_1^{-1} H_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda_{21} & 1 & 0 \\ -\lambda_{31} & -\lambda_{32} & 1 \end{bmatrix}$ è tr inf con 1 sulla diag

dunque : $\boxed{H_1^{-1} H_2^{-1}, \ A^{(3)} \text{ è fatt LR di } A}$

Oss : i coeff $-\lambda_{ij}$ si chiamano MOLTIPLICATORI.

Oss : $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $v \in \mathbb{R}^n$ t.c. $v_k \neq 0$; posto

$$\ell = (\overbrace{0, \dots, 0}^{k}, \frac{v_{k+1}}{v_k}, \dots, \frac{v_n}{v_k})^T \in \mathbb{R}^n$$ e

$$H = I - \ell e_k^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$$ si ha :

- H è tr inf con $h_{jj} = 1$, $j = 1, \dots, n$ ($\Rightarrow$ invertibili)
- $Hv = (v_1, \dots, v_k, 0, \dots, 0)^T$
- $\forall w \in \mathbb{R}^n$ t.c. $w_k = 0$ si ha $Hw = w$

Per esplicitare la dipendenza da v e k, indicheremo la matrice H con la sigla $\lambda(v, k)$

Es : $k = 2$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$; $v_2 \neq 0$, $\ell = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\ell e_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (0, \ell, 0 0)$

e infine $\lambda\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, 2\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.