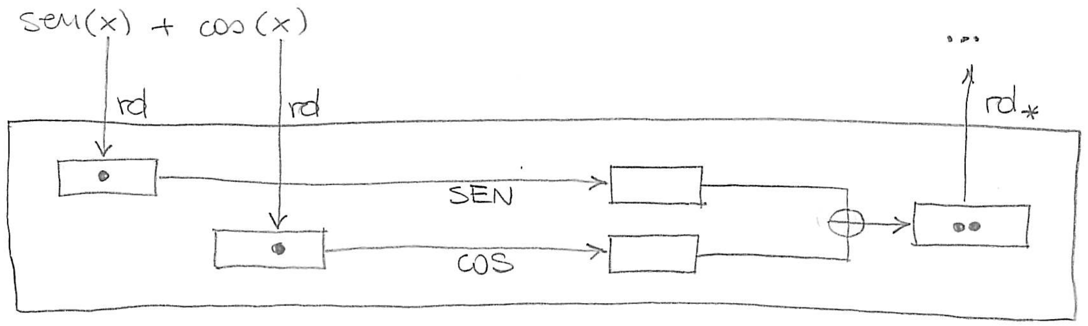
Es: $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$



$\circ = \xi = rd(x)$

$\circ\circ = \text{SEN}(\xi) \oplus \text{COS}(\xi) = \varphi(\xi)$

si approssima $f(x)$ con $\varphi(\xi)$ ...

$$\epsilon_t = \frac{\varphi(\xi) - f(x)}{f(x)} \quad , \; f(x) \neq 0$$ errore relativo TOTALE commesso

$\boxed{\text{Pb: studiare } \epsilon_t.}$ (solo esempi semplici!)

def: $$\epsilon_a = \frac{\varphi(\xi) - f(\xi)}{f(\xi)} \quad , \; f(\xi) \neq 0$$ errore rel ALGORITMICO

$$\epsilon_d = \frac{f(\xi) - f(x)}{f(x)} \quad , \; f(x) \neq 0$$ errore rel TRASMESSO (dai dati)

Oss: $\epsilon_t = \epsilon_a + \epsilon_d + \epsilon_a \epsilon_d$ (dim: ...)

I) CONDIZIONAMENTO del calcolo di $f(x)$.

def (funzione di condiz)

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \mathbb{R}$

$$C(x_1, \dots, x_n ; \epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = \frac{f((1+\epsilon_1)x_1, \dots, (1+\epsilon_n)x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{f(x_1, \dots, x_n)}$$

FUNZIONE di CONDIZIONAM del calcolo di $f(x_1, \dots, x_n)$

Oss: se $\xi = rd(x)$, $\exists \epsilon$ t.c. $rd(x) = (1+\epsilon)x$ perciò:

$$\epsilon_d = \frac{f(\xi) - f(x)}{f(x)} = \frac{f((1+\epsilon)x) - f(x)}{f(x)} = C(x, \epsilon)$$

ovvero, ϵ_d è il valore della f di condiz ...

---

def (qualitativa) se $\forall \epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in [-u, u]$ si ha

$$|C(x_1, \dots, x_n ; \epsilon_1, \dots, \epsilon_n)| \leq ku$$

(k intero non troppo grande)

allora il calcolo di $f(x_1, \dots, x_n)$ è BEN CONDIZIONATO.

$\boxed{\text{Oss: calcolo di } f(x) \text{ ben condiz} \Rightarrow |\epsilon_d| \leq ku}$

Es (f. di condiz per op aritm):

1) $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$; $C(x_1, x_2; \epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{x_1}{x_1+x_2}\epsilon_1 + \frac{x_2}{x_1+x_2}\epsilon_2$

- certam ben condiz se addendi dello stesso segno
- non ben condiz per $x_1 + x_2 \approx 0$

2) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$; $C(x_1, x_2; \epsilon_1, \epsilon_2) = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_2 \approx \epsilon_1 + \epsilon_2$

- sempre ben condiz

3) $f(x_1, x_2) = x_1 / x_2$; $C(x_1, x_2; \epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{1 + \epsilon_2} \approx \epsilon_1 - \epsilon_2$

- sempre ben condiz

Es (f. di condiz per f elem):

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f. elem , $x \in \mathbb{R}$;

$$C(x;\varepsilon) = \frac{f((1+\varepsilon)x) - f(x)}{f(x)} = f'(\theta)\,\frac{x}{f(x)}\,\varepsilon$$

(se f suff regolare, θ tra x e $(1+\varepsilon)x$)

- $\lim_{\varepsilon \to 0} f'(\theta) = f'(x) \Rightarrow C(x;\varepsilon) \approx f'(x)\,\frac{x}{f(x)}\,\varepsilon$

  e $|C(x;\varepsilon)| \leq \left| f'(x)\,\frac{x}{f(x)} \right| u$

A) $f(x) = e^x$; $C(x;\varepsilon) \approx x\varepsilon$

- non ben condiz per $|x|$ grande

B) $f(x) = \operatorname{sen} x$; $C(x;\varepsilon) \approx \frac{x}{\operatorname{tg} x}\,\varepsilon$

- non ben condiz per $|x|$ grande e x vicino a zero di $\operatorname{sen} x$

C) $f(x) = \sqrt{x}$; $C(x,\varepsilon) \approx \frac{1}{2}$

- sempre ben condiz

<u>Oss</u>: Formulaz alternativa di "calcolo ben condiz":

$\forall \varepsilon \in [-u,u]$, $\exists \varepsilon'$ t.c.

$$f((1+\varepsilon)x) = (1+\varepsilon')f(x) \quad \text{e} \quad |\varepsilon'| \leq ku$$

($\forall x' \approx x$ si ha $f(x') \approx f(x)$)

<u>Es</u> (per casa): Studiare il condiz del calcolo di x^2, $\frac{1}{x}$, $\log x$.