CN/$\boxed{1}\div\boxed{3}$ 3 marzo 2009
(B33)

- PAGINA WEB del corso:

  http://www.dma.unipi.it/
  → PERSONE → CIAMPA MAURIZIO
  → DIDATTICA → CALCOLO NUMERICO ... 2008/2009

$\boxed{0}$ FUNZIONALITA' MATEMATICHE DEL CALCOLATORE

... descritte da due insiemi:
- numeri di macchina
- funzioni predefinite

def (esponente e frazione di un reale non zero):

$x \in \mathbb{R}$, non zero ; β intero ≥ 2 (BASE)

$s \in \{0,1\}$ (SEGNO)
$b \in \mathbb{Z}$ (ESPONENTE) t.c. $\boxed{x = (-1)^s \beta^b g}$
$g \in [\beta^{-1}, 1)$ (FRAZIONE)

Oss: dato $x \neq 0$, s, b, g come nella def ESISTONO e sono UNICI!
(dim: $s = \begin{cases} 0 & \text{se } x>0 \\ 1 & \text{se } x<0 \end{cases}$; $b = \ldots$; $g = \beta^{-b}|x|$)

Es:
- $x = \sqrt{5}$, $\beta = 10$; $s = 0$, $b = 1$, $g = \sqrt{5}/10$
- $x = \sqrt{5}$, $\beta = 2$; $s = 0$, $b = 2$, $g = \sqrt{5}/4$

Oss: la condizione $g \in [\ ,\ )$ (che rende unica la fattorizzazione di x) SIGNIFICA che la stringa che rappresenta g in notazione posizionale in base β ha la forma

$$g = 0,c_1 c_2 \ldots \quad \text{con } c_1 \neq 0$$

def (numeri di macchina):

dati: β intero ≥ 2, m intero positivo

$F(\beta, m) = \{0\} \cup \{ x \in \mathbb{R} \mid x = (-1)^s \beta^b\, 0,c_1 c_2 \ldots c_m$ con

$s \in \{0,1\}$; $b \in \mathbb{Z}$; $c_1, \ldots, c_m \in \{0, \ldots, \beta-1\}$ e $c_1 \neq 0 \}$

(ins dei NUMERI IN VIRGOLA MOBILE, BASE β E PRECISIONE m).

CALCOLATORE: dispositivo capace di operare SOLO con numeri di macchina. (I)

Es: $F(10,2)$ — 0, $10^1\, 0{,}100$ (1) ... $10^1\, 0{,}999$ (9,99) tutti gli altri ...

Oss (proprietà dei n.d.m.)
- $\subset \mathbb{R}$ (dal quale eredita DISTANZA e ORDINAMENTO)
- 0 va esplicitamente inserito perché ...
- $F(\beta,m)$ numerabile e $\subset \mathbb{Q}$
- simmetrico risp a zero: $\xi \in F(\beta,m) \Rightarrow -\xi \in F(\beta,m)$
- 0 è punto di accumulazione (ovvero...)
- $\sup F(\beta,m) = +\infty$, $\inf F(\beta,m) = -\infty$ (ovvero...)

Es:
- decidere se $7/8 \in F(2,2)$
  (sol: determ esp e fraz di $7/8$ in base 2; decidere se fraz compatibile con precisione ...)
- PER CASA: decidere se $7/8 \in F(2,3)$
- PER CASA:
  determ successioni ξ_k, ν_k, in $F(10,2)$, t.c.
  $\lim_{k\to\infty} \xi_k = 0$, $\lim_{k\to\infty} \nu_k = +\infty$

def (funzioni successore, predecessore):

$M = F(\beta, m)$; $\sigma: M\setminus\{0\} \to M\setminus\{0\}$, $\sigma(\xi) = \min\{\alpha \in M \mid \alpha > \xi\}$ (SUCCESSORE)
$\pi:$ " " , $\pi(\xi) = \max\{\alpha \in M \mid \alpha < \xi\}$ (PREDECESSORE)

Oss: $\sigma = \pi^{-1}$

CN / 4 , 5 6 marzo 2009 (CØ1)

Es: $F(2,3)$; $\xi = 2^{-1}\, 0{,}101$; $\xi' = 2^{3}\, 0{,}100$

* $\sigma(\xi) = 2^{-1}\, 0{,}110$; $\pi(\xi) = 2^{-1}\, 0{,}100$
* $\sigma(\xi') = 2^{3}\, 0{,}101$; $\pi(\xi') = 2^{2}\, 0{,}111$

Oss: per $\xi < 0$ si ha $\sigma(\xi) = -\pi(-\xi)$ e $\pi(\xi) = -\sigma(-\xi)$.

TEO (densità dei ndm): $F(\beta, m)$, $\xi = \beta^b g$ ($\Rightarrow \xi > 0$)

- $\boxed{\dfrac{\sigma(\xi) - \xi}{\beta^b} = \beta^{-m}}$ (dim ...)

Es: $M_{10} = F(10,3)$, $M_2 = F(2,3)$

* $\beta^{-m} = 10^{-3}$, $\beta^{-m} = 2^{-3}$ $\Rightarrow$ M_{10} è "più denso" di M_2
* MA $M_2 \not\subset M_{10}$ (es: 2^{10}) e $M_2 \not\supset M_{10}$ (es: 10^{-1})
* distanza tra consecutivi
  - in M_2 (vicino a $2^{10} \approx 10^3$): $2^7 = 128$
  - in M_{10} (vicino a $10^3 \approx 2^{10}$): $1 \ll 128$

Oss: $F(\beta, m)$ è utilizzato "per approssimare $\mathbb{R}$"!

def (f. arrotondamento): $rd : \mathbb{R} \to M$ t.c. $rd(x) = \dots$
(è la scelta "migliore poss.")

Oss:
- rd è dispari ($rd(-x) = -rd(x)$)
- rd è non decrescente ($x' > x'' \Rightarrow rd(x') \geq rd(x'')$)
- $rd(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (dim: siccome 0 è di accumulazione...)
- $x \in M \Leftrightarrow rd(x) = x$

Es:
- $x = 7/8$, $M = F(2,2)$; determ $rd(x)$.
  (Sol: determ gli elem di M adiacenti ad x e poi quello più vicino...)
- PER CASA: $x = \frac{1}{10}$, $M = F(2,3)$; determ $rd(x)$.

def (f. errore assol e rel): $M = F(\beta, m)$

- $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $\delta(x) = rd(x) - x$ f. errore ASSOLUTO
- $\varepsilon : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ t.c. $\varepsilon(x) = \dfrac{rd(x) - x}{x}$ f. errore RELATIVO

Oss (proprietà delle f. errore):

- $\delta(-x) = rd(-x) + x = x - rd(x) = -\delta(x) \Rightarrow \delta$ dispari
- $\varepsilon(-x) = \dots = \varepsilon(x) \Rightarrow \varepsilon$ pari

TEO (stime per f. errore): $F(\beta, m)$, x < reale positivo, $= \beta^b g$

- $|\delta(x)| \leq \frac{1}{2}\beta^{b-m}$; $|\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{2}\beta^{1-m}$

(dim: $esp(x) = b \Rightarrow$ 

etc...)

def: $\frac{1}{2}\beta^{1-m} = u$ PRECISIONE di MACCHINA

Oss: la stima per l'err RELATIVO è INDIPENDENTE da x, quella per l'err ASSOLUTO no.

TEO (stima f. errore): $F(\beta, m)$, x < reale positivo ; $= \beta^b g$

- $|\delta(x)| \le \frac{1}{2}\beta^{b-m}$; $|\varepsilon(x)| \le \frac{1}{2}\beta^{1-m}$

(dim: $\exp(x) = b \Rightarrow x \in [\beta^b 0{,}1,\ \beta^b] \Rightarrow |\delta(x)| \le \frac{\text{distanza tra consec}}{2} = \frac{1}{2}\beta^{b-m}$; $|x| \ge \beta^{b-1} \Rightarrow$ stima per $|\varepsilon(x)|$.)

Oss:
- $rd(x) = x + \delta(x)$
- $rd(x) = x(1 + \varepsilon(x))$ $(x \ne 0)$

Es:
- $x = \frac{1}{3}$, $M = F(10,3)$; calcolare $rd(x)$, $\delta(x)$, $\varepsilon(x)$ e verif disug del teo.
- $x = 7$, $\tilde{x}$ t.c. $\left|\frac{\tilde{x}-x}{x}\right| \le \frac{1}{100}$; quali $\tilde{x}$ verificano?
- PER CASA: $x = 7$, $\tilde{x}$ t.c. $\left|\frac{\tilde{x}-x}{x}\right| \le 1$; quali $\tilde{x}$ verificano?

Es: $M = F(2,4)$;
- mostrare che tutti gli elem positivi di M con esponente ≥ 4 sono interi;
- mostrare che tutti gli interi positivi rappresentabili con al più 4 cifre in base 2 sono in M;
- determ $\max\{\xi \in M \mid \xi > 0 \text{ e } \xi \notin \mathbb{Z}\}$.

- $M = F(\beta, m)$; Φ = l'ins di tutte le funz da M in M, anche di più variabili.

PSEUDO-OPERAZIONI ARITMETICHE

Es:
- $\oplus, \ominus, \otimes, \oslash$ def da $\xi_1 \circledast \xi_2 = rd(\xi_1 * \xi_2)$ sono elem di Φ;
- $F: \xi \longrightarrow$ esponente di ξ non è elem di Φ.

def: le funzioni predefinite sono un sottoinsieme finito di Φ; una elaborazione elementare è il calcolo di una f predef o il confronto di due elem di M $(=, \ne, >, \ge)$.

CALCOLATORE: dispositivo capace di eseguire sequenze finite di elaborazioni elementari. (II)

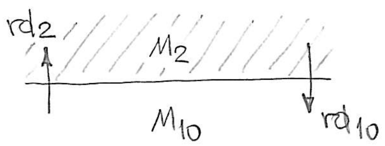
Oss: le pseudo-op aritmetiche $\circledast: M \times M \to M$ approssimano le op aritmetiche $*: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ("nel modo migliore possibile"...). Tutte le f. predef devono essere pensate come elementi di Φ che approssimano (in qualche misura...) qualche funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Es: per ogni num non neg, $SQRT(\xi) = rd(\sqrt{\xi})$ è (sempre!) una f. predefinita. È quella pensata per approssimare la f def per ogni reale non negativo x da $x \to \sqrt{x}$.

Oss: data $\varphi: A \to M$ elem di Φ, un calcolatore può essere utilizz per calcolare φ se $\forall \xi \in A$, $\varphi(\xi)$ si può ottenere con una sequenza finita di elab elementari. Qualunque descriz di φ in termini di seq. finite di elab elem si chiama algoritmo (che calcola φ).

Es: Si cons il calc def da $M = F(10,2)$ e f. predef $\{\oplus, \otimes, \oslash\}$;
- determ tutti gli elem $\alpha \in M$ t.c. $\alpha \oplus 1 = 1$;
- decidere se $\forall \xi \in M$ e $n \in \mathbb{Z}$ si ha $10^n \otimes \xi = 10^n \xi$;
- decidere se si ha: $(1 \oslash 3) \otimes 3 = 1$.

Es:



$M_2 = F(2,3)$, $M_{10} = F(10,2)$
- verif che $x = 1/10 \in M_{10}$ e calc $\xi = rd_2(x)$;
- calc $\tilde{x} = rd_{10}(\xi)$ e decidere se $\tilde{x} = x$.

Es: $M = F(10,6)$; calcolare $(10^8 \oplus 1) \ominus 10^8$ e $10^8 \oplus (1 \ominus 10^8)$.

<u>Oss</u>: si cons • $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ t.c. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$;
• il calc def da $M = F(10,3)$ e f. predef $\supset \oplus$;
• le funz $\varphi_1, \varphi_2 : M^3 \to M$ def da

$$\varphi_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1 \overset{1}{\oplus} \xi_2 \overset{2}{\oplus} \xi_3$$
$$\varphi_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1 \overset{2}{\oplus} \xi_2 \overset{1}{\oplus} \xi_3$$

* è "ragionevole" cons di utilizz φ_1 o φ_2 per appross f (si oss. che sia φ_1 che φ_2 <u>possono</u> essere calcolati dal calc)
* $\varphi_1 \neq \varphi_2$ [<u>Es</u>: $\varphi_1(10^{-2}\,0{,}371;\ 10^{0}\,0{,}865;\ -10^{0}\,0{,}869) = 0$ e $\varphi_2(\cdot;\cdot;\cdot) = -10^{-3}\,0{,}290$ — VERIFICARE!]
* <u>DOMANDA</u>: quale tra φ_1 e φ_2 <u>approssima meglio</u> la f?

ERRORI NEL CALCOLO di UNA FUNZIONE

• $A \subset \mathbb{R}^n$, $f: A \to \mathbb{R}$, $\varphi: A \cap M^n \to M$;
• dati $x \in A$, $\xi \in A \cap M^n$ si utilizza $\varphi(\xi)$ per appross $f(x)$

<u>def</u> (errore totale, trasmesso, algoritmico):

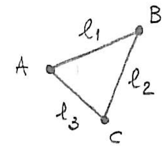
• $\delta_t = \varphi(\xi) - f(x)$; $\delta_d = f(\xi) - f(x)$; $\delta_a = \varphi(\xi) - f(\xi)$

$\Rightarrow \boxed{\delta_t = \delta_d + \delta_a}$ errore ASSOLUTO ... { TOTALE (t), TRASMESSO dai DATI (d), ALGORITMICO (a)

• $\varepsilon_t = \dfrac{\varphi(\xi) - f(x)}{f(x)}$, $\varepsilon_d = \dfrac{f(\xi) - f(x)}{f(x)}$, $\varepsilon_a = \dfrac{\varphi(\xi) - f(\xi)}{f(\xi)}$

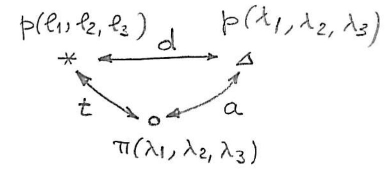
$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_t = \varepsilon_d + \varepsilon_a + \varepsilon_d\varepsilon_a}$ errore RELATIVO ... {⋮ (attenzione ai denom!)

<u>Oss</u>: • err trasmesso dai dati $\neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq f(\xi)$, $\Rightarrow x \neq \xi$ [errore sui DATI $\neq 0$]
• err algo $\neq 0 \Leftrightarrow \varphi(\xi) \neq f(\xi) \Rightarrow \varphi \neq f$ [l'algoritmo non calcola f]

<u>Es</u>: 

, calcolare il perimetro del triangolo.

• $p(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$
• $\pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1 \overset{1}{\oplus} \lambda_2 \overset{2}{\oplus} \lambda_3 : M^3_+ \to M$



<u>Oss</u>: • se d ed a piccoli anche t è piccolo
• $\ell \neq \lambda$ perché $\ell \notin M$ oppure λ misura (inesatta) di ℓ...

(I) <u>Studio dell'ERRORE TRASMESSO dai dati</u> (CONDIZIONAM.)

<u>def</u>: $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$; $\delta_k = \tilde{x}_k - x_k$ err. assol. SUL DATO k-esimo
se $x_k \neq 0$: $\varepsilon_k = \dfrac{\tilde{x}_k - x_k}{x_k}$ " relativo SUL DATO k-esimo

• $\delta_d = f(\tilde{x}) - f(x) = f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) - f(x_1, \dots, x_n)$ ...
$\dots = f(x_1 + \delta_1, \dots, x_n + \delta_n) - f(x_1, \dots, x_n) = F_\delta(x_1, \dots, x_n; \delta_1, \dots, \delta_n)$
$\dots = f(x_1(1+\varepsilon_1), \dots, x_n(1+\varepsilon_n)) - f(x_1, \dots, x_n) = G_\delta(x_1, \dots, x_n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

• $\varepsilon_d = \dots = F_\varepsilon(x_1, \dots, x_n; \delta_1, \dots, \delta_n)$
$\dots = G_\varepsilon(x_1, \dots, x_n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

$F_\delta, F_\varepsilon, G_\delta, G_\varepsilon$ sono esempi di FUNZIONE di CONDIZIONAMENTO — che esprime l'errore trasmesso dai dati in termini di dati (x) e di errore sui dati.

<u>Es</u> (f. di condiz per le op aritmetiche)

1) $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$
• $\delta_d = (x_1 + \delta_1) + (x_2 + \delta_2) - (x_1 + x_2) = \delta_1 + \delta_2$ (indip dal dato!)
• $\varepsilon_d = \dots = \dfrac{x_1}{x_1 + x_2}\varepsilon_1 + \dfrac{x_2}{x_1 + x_2}\varepsilon_2$

<u>Oss</u>: Studiare il condiz (del pb. del calcolo di f) SIGNIFICA <u>studiare le funzioni di condiz.</u>

$\boxed{*}$ Se $x_1, x_2 > 0$ allora:
$$|\varepsilon_d| \leq \left|\frac{x_1}{x_1+x_2}\right| |\varepsilon_1| + \left|\frac{x_2}{x_1+x_2}\right| |\varepsilon_2| < |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|$$

(*) Se, ad es. $x_1 = 10^6 + 1$, $x_2 = -10^6$:
$$\varepsilon_d = (10^6 + 1)\varepsilon_1 + 10^6 \varepsilon_2$$

Nel caso $\boxed{*}$ possiamo dire err trasm $\simeq$ err sui dati;
nel caso (*) <u>no</u>!

Es (f di condizionam per le op aritmetiche):

1) $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$

- $\delta_d = \delta_1 + \delta_2$ (indip dal dato!)
- $\varepsilon_d = \dfrac{x_1}{x_1+x_2}\varepsilon_1 + \dfrac{x_2}{x_1+x_2}\varepsilon_2$

Oss: • Se $x_1 x_2 > 0$ allora $\left|\dfrac{x_1}{x_1+x_2}\right| < 1$ e $\left|\dfrac{x_2}{x_1+x_2}\right| < 1$

e quindi: $|\varepsilon_d| < |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|$ ("caso buono")

• Se, ad es, $x_1 = 10^6$, $x_2 = 1-10^6$: $\varepsilon_d = 10^6\varepsilon_1 + (1-10^6)\varepsilon_2$

e PUÒ ACCADERE che $|\varepsilon_d| >> |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|$ ("caso cattivo")

2) $f(x_1,x_2) = x_1 x_2$

- $\delta_d = \dots = x_1\delta_2 + x_2\delta_1 + \delta_1\delta_2$
- $\varepsilon_d = \dots = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$ (indip dal dato!)

3) $f(x_1,x_2) = x_1/x_2$

- $\delta_d = \dfrac{x_2\delta_1 - x_1\delta_2}{x_2(x_2+\delta_2)}$
- $\varepsilon_d = \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{1+\varepsilon_2}$ (indip dal dato!)

Es. Altezza di una RISMA di fogli A4 : $h \in [4{,}9 \,;\, 5{,}1]$ cm

1 RISMA = 500 fogli

spessore di 1 foglio : $s = h/500$

- Se $h = h_0 + \delta$ con $h_0 = 5$ cm e $|\delta| \leq 0{,}1$ cm

allora: $s = h_0/500 + \delta/500 = s_0 + \delta'$ con: $s_0 = \dfrac{1}{100}$ cm $= 100\,\mu m$

$|\delta'| \leq \dfrac{0{,}1}{500}$ cm $= 2\,\mu m$

utilizz (3) : $\delta_d \overset{\delta_2=0}{=} \dfrac{\delta_1}{x_2}$, $\delta_1 = \delta$ e $|\delta_d| \leq \dfrac{0{,}1}{500}$ cm

- se $h = h_0(1+\varepsilon)$ con $h_0 = 5$ cm e $|\varepsilon| \leq \dfrac{1}{50}$

allora: $s = \dfrac{h_0}{500}(1+\varepsilon) = s_0(1+\varepsilon)$ con: $s_0 = 100\,\mu m$

$|\varepsilon| \leq \dfrac{1}{50}$

utilizz (3) : $\varepsilon_d \overset{\varepsilon_2=0}{=} \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$ e ...

Oss: * l'errore relativo non cambia!

* $\varepsilon_d = \dfrac{s_0 - s}{s_0}$ (attenzione...!)

Oss (condizionam. per funzioni C^1):

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$; $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}$; $\delta = \tilde{x} - x$; $\varepsilon = \frac{\tilde{x} - x}{x}$

- $\delta_d = f(\tilde{x}) - f(x) = f(x+\delta) - f(x)$
$= f'(\tau)\,\delta$ $\underbrace{\text{con } \tau \text{ tra } x \text{ ed } x+\delta}_{\tau = T(x,\delta)}$ (Teo ...)

$\Rightarrow \delta_d = f'(T(x,\delta))\,\delta$ f. di condizionamento

* SE $|f'(x)| \leq L$ per tutti gli $x \in \mathbb{R}$
ALLORA : $|\delta_d| \leq L\delta$

* $\lim_{\delta \to 0} \frac{\delta_d}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} f'(T(x,\delta)) = f'(x)$

- $\varepsilon_d = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} = \frac{f(x+\varepsilon x) - f(x)}{f(x)} = \frac{f'(\tau)\,\varepsilon x}{f(x)}$

$\Rightarrow \varepsilon_d = \frac{f'(T(x,\varepsilon))}{f(x)}\, x\, \varepsilon$ f. di condiz. con $\underbrace{\tau \text{ tra } x \text{ ed } x+\varepsilon x}_{\tau = T(x,\varepsilon)}$

* SE $\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\, x\right| \leq L$ per tutti gli $x \in \mathbb{R}$
ALLORA : $|\varepsilon_d| \leq L\varepsilon$

* $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f'(T(x,\varepsilon))}{f(x)}\, x = \frac{f'(x)}{f(x)}\, x$

Es: $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = e^x$, $\frac{f'(x)}{f(x)}\, x = x$
casi "cattivi" : err. assol $x \gg 0$, err. rel $|x| \gg 0$.

(II) Studio dell' errore algoritmico (STABILITA')

Oss (caso "elementare"): $f : A \to \mathbb{R}$, $\varphi : A \cap M^n \to M$ t.c. $\varphi(\xi) = rd(f(\xi))$
ALLORA: $|\delta_a| = |\varphi(\xi) - f(\xi)| = |rd(f(\xi)) - f(\xi)| \leq \frac{1}{2}\beta^{b-m}$
$|\varepsilon_a| = \ldots \leq u$

Es (pseudo-op aritmetiche): per $* \in \{+, -, \times, /\}$ si ha
$f(x_1, x_2) = x_1 * x_2$, $\varphi(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \circledast \xi_2 = rd(f(\xi_1, \xi_2))$ ...

Es (caso non elementare): $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)\, x_3$; $\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1 \overset{1}{\oplus} \xi_2) \overset{2}{\otimes} \xi_3$

siccome
- $\xi_1 \overset{1}{\oplus} \xi_2 = rd(\xi_1 + \xi_2) = (\xi_1 + \xi_2)(1 + \varepsilon_{a1})$, $|\varepsilon_{a1}| \leq u$
- $\xi_1 \overset{2}{\otimes} \xi_2 = \dots = \xi_1 \xi_2 (1 + \varepsilon_{a2})$, $|\varepsilon_{a2}| \leq u$

allora : $\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1 + \xi_2)(1 + \varepsilon_{a1})\, \xi_3 (1 + \varepsilon_{a2}) = F(\xi_1, \xi_2, \xi_3 ; \varepsilon_{a1}, \varepsilon_{a2})$

dunque si ha
- $\delta_a = \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) =$
  $= F(\xi_1, \xi_2, \xi_3 ; \varepsilon_{a1}, \varepsilon_{a2}) - f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \boxed{\Delta(\xi_1, \xi_2, \xi_3 ; \varepsilon_{a1}, \varepsilon_{a2})}$
- $\varepsilon_a = \dots = \boxed{E(\xi_1, \xi_2, \xi_3 ; \varepsilon_{a1}, \varepsilon_{a2})}$

FUNZIONE di STABILITA'
(quando si utilizza φ per appross f)

Es: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$; $M = F(10, 3)$, f.predef $\supset \oplus$

$\varphi_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1 \oplus \xi_2) \oplus \xi_3$, $\varphi_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1 \oplus (\xi_2 \oplus \xi_3)$

$\xi_1 = 10^{-2}\, 0{,}371$; $\xi_2 = 10^0\, 0{,}865$; $\xi_3 = -10^0\, 0{,}869$ | $\varphi_1(\dots) = 0$
$\varphi_2(\dots) = -10^{-3}\, 0{,}290$

- siccome $\varphi_1(\dots) = 0$, stimiamo l'ERR. ASSOLUTO:

① $\delta_a = \varphi_1(\xi) - f(\xi) = \dots = \delta_{a1} + \delta_{a2}$ $\begin{cases} |\delta_{a1}| \leq \frac{1}{2} 10^{0-3} = 0{,}5 \cdot 10^{-3} \\ |\delta_{a2}| = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow |\delta_a| \leq 0{,}5 \cdot 10^{-3}$

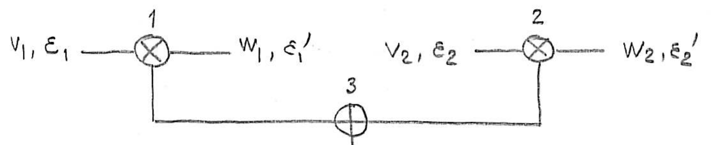
② $\delta_a = \varphi_2(\xi) - f(\xi) = \delta_{a1} + \delta_{a2}$ $\begin{cases} |\delta_{a1}| \leq \frac{1}{2} 10^{-2-3} = 0{,}5 \cdot 10^{-5} \\ |\delta_{a2}| \leq \frac{1}{2} 10^{-3-3} = 0{,}5 \cdot 10^{-6} \end{cases}$

$\Rightarrow |\delta_a| \leq 0{,}55 \cdot 10^{-5}$

Q.di φ_2 è più affidabile di φ_1 per appross. $f(\xi)$

Es: Si approssima il p.s. canonico in $\mathbb{R}^2$ con $PS(v,w) = (v_1 \otimes w_1) \oplus (v_2 \otimes w_2)$.

- condizionam del p.s. canonico:

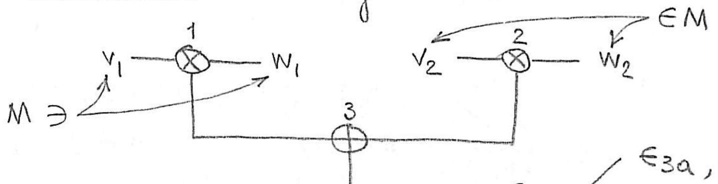


$$\varepsilon_{1d} = \varepsilon_1 + \varepsilon_1' + \varepsilon_1 \varepsilon_1'$$
$$\varepsilon_{2d} = \varepsilon_2 + \varepsilon_2' + \varepsilon_2 \varepsilon_2'$$
$$\varepsilon_{3d} = \frac{v_1 w_1}{v_1 w_1 + v_2 w_2} \varepsilon_{1d} + \frac{v_2 w_2}{v_1 w_1 + v_2 w_2} \varepsilon_{2d}$$

* SE $v_1 w_1$ e $v_2 w_2$ concordi: "tutto bene"

ALTRIMENTI attenzione (ad es: se v, w quasi ortogonali ...)

- stabilità dell' algoritmo:



$\varepsilon_{1t} = \varepsilon_{1a}$, $|\varepsilon_{1a}| \le u$

$\varepsilon_{2t} = \varepsilon_{2a}$, $|\varepsilon_{2a}| \le u$

$$\varepsilon_{3t} \begin{cases} \varepsilon_{3a}, \ |\varepsilon_{3a}| \le u \\ \varepsilon_{3d} = \dfrac{v_1 w_1}{v_1 w_1 + v_2 w_2} \varepsilon_{1t} + \dfrac{v_2 w_2}{v_1 w_1 + v_2 w_2} \varepsilon_{2t} \end{cases}$$

* SE $v_1 w_1$ e $v_2 w_2$ concordi ... ALTRIMENTI ...

Più dettagliatamente:

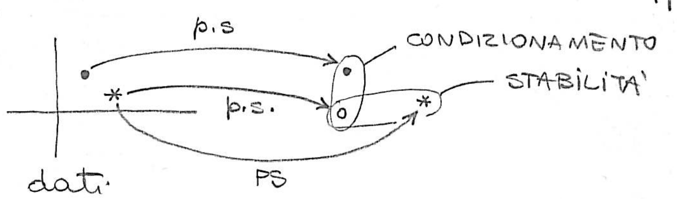
posto: $\rho_1 = v_1 \otimes w_1$, $r_1 = v_1 w_1$
$\rho_2 = v_2 \otimes w_2$, $r_2 = v_2 w_2$

si ha: $\varepsilon_{3t} = \dfrac{\rho_1 \oplus \rho_2 - (r_1 + r_2)}{r_1 + r_2}$

che si scompone in: $\varepsilon_{3a} = \dfrac{\rho_1 \oplus \rho_2 - (\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1 + \rho_2}$; $\varepsilon_{3d} = \dfrac{(\rho_1 + \rho_2) - (r_1 + r_2)}{r_1 + r_2}$

e l'errore sui dati è: $\dfrac{\rho_1 - r_1}{r_1} = \varepsilon_{1t}$, $\dfrac{\rho_2 - r_2}{r_2} = \varepsilon_{2t}$.

Ad es, per calcolare $\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \pi \\ 1/10 \end{bmatrix} \ldots$



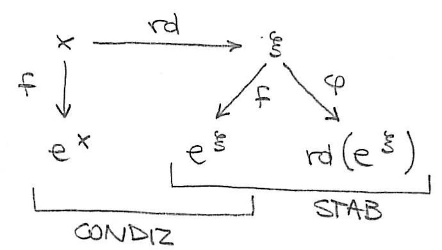
Es: Per appross $f(x) = e^x$ si utilizza $\varphi(\xi) = rd(e^\xi)$, che si suppone calcolabile ($\in$ f. predef)

- STABILITA': $\varepsilon_a = \dfrac{\varphi(\xi) - f(\xi)}{f(\xi)} = \dfrac{rd(e^\xi) - e^\xi}{e^\xi}$; caso elem $\Rightarrow |\varepsilon_a| \le u$

- CONDIZIONAM: $\varepsilon_d = \dfrac{e^{x(1+\varepsilon)} - e^x}{e^x} = e^{\varepsilon x} - 1$ (f. di condizionam)

$\boxed{\text{Oss: per } x \text{ piccolo}, \ e^{\varepsilon x} - 1 \approx \varepsilon x}$

In pratica:



Ad es: in $F(10,3)$, $x = 100\pi$
- $|\varepsilon_a| \le u = \frac{1}{2} 10^{1-3} = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$
- $\xi = rd(x) = 314$
- $|\varepsilon_d| = \left| \dfrac{e^{314} - e^{100\pi}}{e^{100\pi}} \right| \simeq 0{,}15$

Oss (rapido sguardo sulle realtà):

CALCOLO SCIENTIFICO	COMPUTER ALGEBRA
• $M = F(\beta, m)$	• $M = \mathbb{Q}$
• $\oplus, \ominus, \otimes, \oslash : M \times M \to M$	• $+, -, \times, / : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$
è modello di "calcolatore reale" (IEEE 754):	
• $M = F(\beta, m, L, U)$, ovvero b intero $\in [L, U]$	
($\Rightarrow$ ad es: M finito, 0 non di accumulaz, $\exists$ max M, min M, min $\{\xi \in M, \xi > 0\}$ ...)	
Es: MATLAB, SCILAB, OCTAVE ...	Es: MAPLE, MATHEMATICA, AXIOM ...

- Per appross $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$:
$(\xi_1 \oplus \xi_2) \oplus \xi_3 = 0$
con stima: $|\varepsilon_a| \le 0{,}5 \cdot 10^{-3}$

- $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = -0{,}29 \cdot 10^{-3}$ (esatto!)

- $10^{-45} = 10^{-44}\, 0{,}1 \in F(10,3)$
$1 \oplus 10^{-45} = 1$ (approssimato ...)

- $1 + 10^{-45} = \dfrac{10^{45} + 1}{10^{45}}$ esatto ...
... rapporto di due interi su 46 cifre

SPAZIO per rappres $\xi \in M$: indip da ξ !!	SPAZIO per rappres $\xi \in \mathbb{Q}$: dipende da ξ !!
(Oss: FALSO se esponente non lim ...)	
$\Rightarrow$ "facile" gestire tanti elem.	$\Rightarrow$ "difficile" gestire tanti elem.
TEMPO per calcolare $\xi_1 \otimes \xi_2$: indip da ξ_1, ξ_2 !!	TEMPO per calcolare $\xi_1 \cdot \xi_2$: dipende da ξ_1, ξ_2 !!
$\Rightarrow$ "facile" prevedere durata calcoli.	$\Rightarrow$ "difficile" prevedere durata calcoli.

Oss: Altro modello: VIRGOLA FISSA (v. App. F, p. 45). Uso: DSP

CN / $\boxed{16}$, $\boxed{18}$ 24 marzo 2009 (B33)

$\boxed{1}$ ZERI di FUNZIONI di VARIABILE REALE

Pb: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua, determinare $\alpha \in [a,b]$ t.c. $f(\alpha) = 0$

Vedremo:
- METODO di BISEZIONE;
- METODI ad UN PUNTO;
  - * caso particolare: METODO di NEWTON.

Schema della presentazione:

Pb, descrizione e discussione di un metodo di soluzione OPERANDO in $\mathbb{R}$,
discussione del metodo OPERANDO in $\mathbb{M}$.

- Metodo di bisezione.

idea: utilizz il TEO di ESISTENZA degli ZERI per costruire una successione di intervalli I_k, ciascuno contenente uno zero e t.c. $I_{k+1} \subset I_k$, $\lim_{k \to \infty} mis(I_k) = 0$.

SE $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e $f(a) f(b) < 0$ ALLORA $\exists$ zero di f in (a,b)

* descrizione del metodo (operando in $\mathbb{R}$)

dati: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua e $f(a) f(b) < 0$;
$a_0 = a$, $b_0 = b$, $I_0 = [a_0, b_0]$, $x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$;
per $k = 1, 2, \dots$ ripeti
  se $f(x_{k-1}) = 0$ allora STOP
  altrimenti
  - se $f(x_{k-1}) f(b_{k-1}) < 0$ allora $a_k = x_{k-1}$, $b_k = b_{k-1}$;
  - se $f(a_{k-1}) f(x_{k-1}) < 0$ allora $a_k = a_{k-1}$, $b_k = x_{k-1}$;
  - $I_k = [a_k, b_k]$, $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$;

uscita: quando un opportuno criterio d'arresto è verificato, x_k, I_k.

Es:

$k=0$	a_0	x_0		b_0	I_0
$k=1$		a_1	x_1	b_1	I_1
$k=2$		a_2 x_2 b_2			I_2

Oss:
- I_k è il semintervallo (destro o sinistro) di I_{k-1} ...
- $mis(I_k) = \frac{mis(I_{k-1})}{2^1} = \frac{mis(I_{k-2})}{2^2} = \dots = \frac{mis(I_0)}{2^k}$

$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} mis(I_k) = 0$.

Oss (criterio d'arresto, ASSOLUTO): dato $\delta > 0$, decidiamo di arrestare l'iterazione ... $\boxed{\text{se } mis(I_k) < \delta \text{ allora STOP}}$

- $\forall k$, $mis(I_k)$ è calcolabile ($= |b_k - a_k|$) e, per quanto detto sopra, la disuguaglianza è CERTAMENTE verificata dopo un numero FINITO di iterazioni!
- Quando il criterio d'arresto è verificato (ad es. $k = N$) si ha:
  - * $\exists \alpha \in I_N$ t.c. $f(\alpha) = 0$
  - * $|x_N - \alpha| < \frac{mis(I_N)}{2} < \delta/2$

q.di si è ottenuta un'approssimazione di α con ERRORE ASSOLUTO $< \delta/2$.

Es: dato $\delta = 2^{-m} g$ (esponente $-m < 0$, $\frac{1}{2} \le g < 1$), determinare k t.c. $mis(I_k) < \delta$ (ovvero: il numero di iterazioni minimo che rende verificato il criterio di arresto).
(Sol: $k > \log_2 mis(I_0) - \log_2 g + m$)

Es: $\mathbb{M} = F(10,16)$, determ un intervallo I, con estremi in $\mathbb{M}$ t.c $I \ni \sqrt{2}$ e $mis(I) < 10^{-15}$.

Sol: $\sqrt{2} = 10^1\, 0{,}1\dots \Rightarrow$ distanza tra elem consecutivi di $\mathbb{M} = 10^{-15}$
$\Rightarrow \nexists$ intervallo con le proprietà richieste.

Oss: Se utilizziamo un calc che opera in $F(10,16)$ per appross lo zero positivo di $f(x) = x^2 - 2$ con il metodo di bisezione, con criterio d'arresto assoluto $mis(I_k) < \delta$, usare $\delta \leq 10^{-15}$ fa sì che l'esecuzione della procedura non si arresti mai.

Oss (criterio d'arresto, RELATIVO): se I_k contiene uno zero (α) di f e non contiene 0, posto $m_k = \min\{|a_k|, |b_k|\}$ si ha

$$\left|\frac{x_k - \alpha}{\alpha}\right| \leq \frac{mis(I_k)}{2m_k}$$

Perciò, dato $\varepsilon > 0$, decidiamo di arrestare l'iterazione...

$\boxed{\text{se } \frac{mis(I_k)}{m_k} < \varepsilon \text{ allora STOP}}$ ottenendo così un'appross (x_k) di α con ERRORE RELATIVO $< \varepsilon/2$.

Oss:
- Se $0 \notin I_0$: $\forall k$, $\frac{mis(I_k)}{m_k}$ è calcolabile (perché $m_k \neq 0$), ed il criterio è certam verif dopo un numero finito di it $\left(\lim_{k\to\infty} \frac{mis(I_k)}{m_k} \ldots\right)$
- anche utilizz il cr d'arresto relativo, operando in M occorre utilizz ε non troppo piccolo!

Oss: la successione I_k è determinata dal segno di $f(x_k)$; se si opera in M, si approssima $f(x_k)$ con $\varphi(x_k)$...

Pb: la "rapidità" del metodo di bisezione dipende solo da:
- ampiezza I_0 e ordine di grandezza δ (cr arr ASSOL)
- " ", ordine di grandezza ε ed α (cr arr REL)

in part: è indipendente da proprietà particolari di f.

- Metodi ad un punto

idea: data f di cui interessa uno zero, determ h t.c. $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = h(x)\}$.

ovvero: α zero di $f \Leftrightarrow \alpha$ punto unito di h

Es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $g(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
$h(x) = x - f(x)\,g(x) \Rightarrow f(x) = 0$ equivalente a $x = h(x)$.

Es: $f(x) = x + \log x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$; $h_1(x) = -\log x$
$h_2(x) = e^{-x}$, $h_3(x) = \frac{x + e^{-x}}{2}$.

- Metodi ad un punto : ...

* descrizione del metodo (op. in $\mathbb{R}$)

> dati : $h:[a,b] \to \mathbb{R}$, continua, $c \in [a,b]$;
>
> $x_0 = c$;
>
> per $k = 1, 2, \dots$ ripeti : se $x_{k-1} \notin [a,b]$ allora STOP
>
> altrimenti $x_k = h(x_{k-1})$
>
> uscita : quando un opportuno criterio d'arresto è verificato, x_k.

Oss : se $x_0, x_1, x_2, \dots$ è una success in $[a,b]$ convergente ad α, allora la success $h(x_0), h(x_1), h(x_2), \dots$ è convergente a $h(\alpha)$ (dim : h è continua !)

se, inoltre : $x_1 = h(x_0)$, $x_2 = h(x_1), \dots$ allora : $\alpha = h(\alpha)$

OVVERO :

> se $x_0, x_1 = h(x_0), x_2 = h(x_1), \dots$ è una success in $[a,b]$ convergente, il limite della successione è punto unito di h.

Pb : decidere se $\exists$ (ed eventualm determinare) $c \in [a,b]$ in modo che $x_0 = c$, $x_1 = h(x_0)$, $x_2 = h(x_1), \dots$ sia una successione in $[a,b]$ convergente.

Sol : utilizz il ...

> TEO (di convergenza locale): Siano $[a,b]$, $h \in \mathcal{C}^1[a,b]$ e $c \in [a,b]$ t.c:
>
> 1) $\exists\, \alpha \in [a,b]$ punto unito di h;
> 2) $\exists\, L \in [0,1)$ t.c. $\forall x \in [a,b]$, $|h'(x)| \le L$;
> 3) $x_0 = c$, $x_1 = h(x_0)$, $x_2 = h(x_1), \dots$ sia una successione in $[a,b]$.
>
> Allora : (i) α è l'unico punto unito di h in $[a,b]$;
>
> (ii) la successione $x_0, x_1, x_2, \dots$ è convergente (ad α).

dim : (i) PER ASSURDO... α, β punti uniti distinti di h in $[a,b]$

$\Rightarrow \alpha - \beta = h(\alpha) - h(\beta) \overset{\text{TEO. LAGRANGE}}{=} h'(\theta)(\alpha - \beta)$, θ tra α e β ($\Rightarrow \theta \in [a,b]$)

$\Rightarrow h'(\theta) = 1$, assurdo (vedere ip. (2)).

> Oss : Ip. (3) non serve per (i) !

(ii) $x_k - \alpha = h(x_{k-1}) - h(\alpha) \overset{\text{T.L.}}{=} h'(\theta_{k-1})(x_{k-1} - \alpha)$, $\theta_{k-1} \in [a,b]$ (per ip. (3))

(*) $\Rightarrow |x_k - \alpha| = |h'(\theta_{k-1})|\, |x_{k-1} - \alpha| \le L\, |x_{k-1} - \alpha|$

... iterando ... $\le L^k |x_0 - \alpha|$

$\Rightarrow |x_0 - \alpha|, |x_1 - \alpha|, |x_2 - \alpha|, \dots$ è monotona e conv a 0

(ovvero: $\lim_{k \to \infty} x_k = \alpha$)

(*) $\Rightarrow$ se $h'(x) \ne 0 \quad \forall x \in [a,b]$:

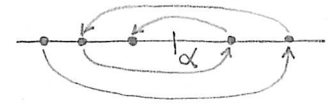
(+) $x_k - \alpha$, $x_{k-1} - \alpha$ concordi se $h'(x) > 0$

ovvero : x_k, x_{k-1} "dalla stessa parte risp ad α"

$\Rightarrow$ la success $x_0, x_1, x_2, \dots$ è monotona;

(−) $x_k - \alpha$, $x_{k-1} - \alpha$ discordi se $h'(x) < 0$

ovvero: x_k, x_{k-1} "da parti opposte rispetto ad α"

$\Rightarrow$ 

Es : $h(x) = \frac{\cos x}{2} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$;
- $\exists$ p.u di h in $[0, \pi/2]$ (graficamente...)
- $\forall x \in [0, \pi/2]$, $|h'(x)| \le 1/2 = L$

- $x \in [0, \pi/2] \Rightarrow h(x) \in [0, \pi/2]$, q.di $\forall c \in [0, \pi/2]$ la success...
- Costruzione grafica della success.

Es (continuazione): $h(x) = \frac{\cos x}{2}$ • $\exists$ pu in $[0, \pi/2]$

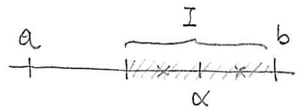
- $|h'(x)| \le 1/2$ in $[0, \pi/2]$ ($\Rightarrow$ unicita' p.u)
- $\forall c \in [0, \pi/2]$ la succes converge al p.u
- costruz. grafica ...

> Oss: se $[a,b]$ ed h verificano ip. (1) e (2), non e' vero che $\forall x \in [a,b]$ si ha $h(x) \in [a,b]$!

Es: $h : [1,7] \to \mathbb{R}$ t.c. $h(x) = 3 - \frac{x}{2}$;

- 2 e' p.u ; $|h'(x)| \le 1/2$ su $[1,7]$ MA $h(6) \in [1,7]$!

Oss: se $[a,b]$ ed h verificano ip (1) e (2) allora:



$r = \min\{|\alpha - a|, |b - \alpha|\}$, $I = [\alpha - r, \alpha + r]$

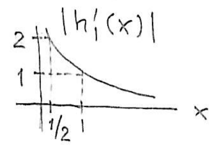
$\forall x \in I$, $h(x) \in I$ (infatti...)

Q.di:

> SE $[a,b]$, h verif ip (1) e (2)
> ALLORA $c =$ (l'estremo di $[a,b]$ piu' vicino al p.u
> genera succes che verifica ip (3) !

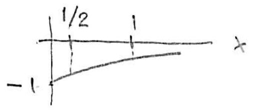
Es: $f(x) = x + \log x$; $h_1(x) = -\log x$, $h_2(x) = e^{-x}$, $h_3(x) = \frac{x + e^{-x}}{2}$.

- $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \#\text{zeri} \le 1$
  - * $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$, $f(1) = 1 \Rightarrow \exists!$ zero, $\alpha \in (0,1]$
  - * $f(1/2) = 1/2 - \log 2 < 0 \Rightarrow \alpha \in [1/2, 1]$
- $h_1'(x) = -\frac{1}{x}$;



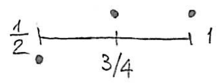
$\Rightarrow |h'(\alpha)| > 1$ e q.di $\nexists [a,b]$ che verif. ip (1), (2).

- $h_2'(x) = -e^{-x}$



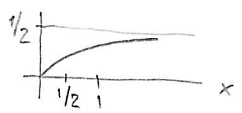
, $|h_2'(x)| \le e^{-1/2} = L_2 < 1$ su $[1/2, 1]$

  - * $[1/2, 1]$, h_2 verif ip (1) e (2) ;



$\Rightarrow$ l'estr piu' vicino e' $c = 1/2$.

- $h_3'(x) = \frac{1 - e^{-x}}{2}$



, $|h_3'(x)| \le \frac{1 - 1/e}{2} = L_3 < 1$ su $[1/2, 1]$

  - * $[1/2, 1]$, h_3 verif. ip (1) e (2) ; $c = 1/2$ rende verif (3).

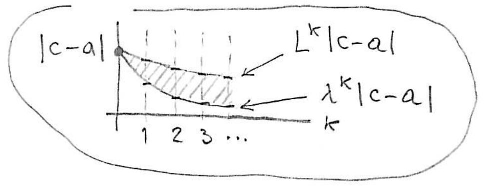
Q.di: h_2, h_3 ok, h_1 ?

> Oss: se $h \in \mathcal{C}^1$ e α pu di h tali che $|h'(\alpha)| > 1$ allora:
> $\exists \hat{k}$ t.c. $x_k = \alpha$ per $k \ge \hat{k}$ OPPURE $x_k \not\to \alpha$

Oss (rapidita' di convergenza): se h, $[a,b]$, c verif ip teo conv loc e $x_k \ne \alpha$ per ogni k, allora:

- SE $0 < \lambda \le |h'(x)| \le L < 1$ su $[a,b]$, ALLORA $\lambda^k |c - a| \le |x_k - \alpha| \le L^k |c - a|$

ovvero: $|x_k - \alpha| \to 0$...



  - *... almeno rapidam come $L^k|c-a|$ ma...
  - *... non piu' rapidam di $\lambda^k |c-a|$.

- SE $h'(\alpha) = 0$, $\forall \theta > 0$ si ha: $\lim_{k \to \infty} \frac{|x_k - \alpha|}{\theta^k} = 0$

ovvero: $|x_k - \alpha| \to 0$...

  - *... piu' rapidamente di qualsiasi esponenziale

> def (ordine di convergenza DEL METODO):
> - $h \in \mathcal{C}^1$, α p.u e $0 < |h'(\alpha)| < 1$: ORDINE di CONVERGENZA ad α : 1
> - $h \in \mathcal{C}^2$, α p.u e $h'(\alpha) = 0$, $h''(\alpha) \ne 0$: O.d.C. ad α : 2

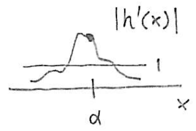
Es (continuazione):

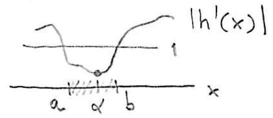
- $1/e \le |h_2'(x)| \le 1/\sqrt{e}$
- $\frac{1 - 1/\sqrt{e}}{2} \le |h_3'(x)| \le \frac{1 - 1/e}{2}$

OdC ad α : 1 per entrambi, MA siccome $\frac{1 - 1/e}{2} < \frac{1}{e}$ ...

... il metodo def da h_3 garantisce, nel caso peggiore ("piu' lento") una rapidita' di convergenza maggiore del metodo def da h_2.

<u>Oss</u>: $h \in C^1$ ed α p.u di h ; $\exists [a,b]$ che verifica ip (1) e (2) del Teo di conv loc $\Leftrightarrow |h'(\alpha)| < 1$.

(<u>dim</u> : 

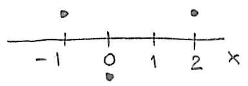
; 

siccome $h \in C^1$, h' e' continua...)

<u>Es</u>: Sia $h(x) = e^x - x - 2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

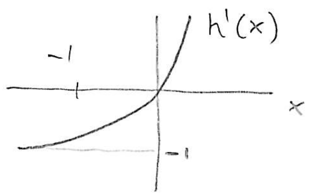
- <u>SEPARARE</u> i p.u di h
- per ciascun p.u, discutere l'uso del met it (operando in $\mathbb{R}$)

<u>Sol</u>: • $h(x) = x \Leftrightarrow \underbrace{e^x - 2(x+1)}_{F(x)} = 0$; $F \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\boxed{F''(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \# \text{zeri} \leq 2}$

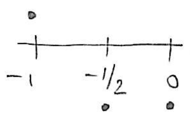


$\Rightarrow \# \text{zeri} = 2$; $\boxed{\begin{array}{l} \alpha_1 \in (-1,0) \\ \alpha_2 \in (0,2) \end{array}}$

• $h'(x) = e^x - 1$



* $-1 < h'(\alpha_1) < 0 \Rightarrow$ metodo it <u>utilizz</u> per appross α_1 ; <u>OdC</u> ad α_1 : 1 ;



$\Rightarrow c = -1$ genera succes convergente (siccome $h'(x) < 0$, la succes...)

* l'intervallo $[0,2]$ <u>non</u> verif ip (2)...

$\Rightarrow [1,2] \ni \alpha_2$, <u>MA</u> $h'(x) > 1 \ \forall x \in [1,2] \Rightarrow h'(\alpha_2) > 1$

q.di : metodo it <u>non utilizz</u> per appross α_2.

Oss: Sostituendo l'ip (2) del teo. di conv locale con l'ip

(2') $\exists L \in [0,1)$ t.c. $\forall x,y \in [a,b]$, $|h(x)-h(y)| \le L|x-y|$

le tesi del teo continuano a sussistere. L'ip (2') si enuncia "h è una contrazione su $[a,b]$."

- (2) $\Rightarrow$ (2') — $\exists$ funz che verificano (2') ma non (2);
- se si richiede (2') anziché (2), h non deve necessariam essere derivabile su $[a,b]$;
- (2') $\Rightarrow$ h continua in $[a,b]$;

Oss (confronto bisez/metodi ad un punto con OdC = 1):

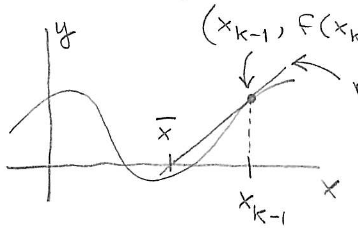
- Applicabilità (op in $\mathbb{R}$!): BISEZ ... f cont su $[a,b]$ con $f(a)f(b)<0$
  METODI ad UN PUNTO ... h verif ip teo conv locale
- rapidità di conv: BISEZ ... $\frac{mis\, I_k}{mis\, I_0} = \frac{1}{2^k}$
  METODI ad UN PUNTO ... $\frac{|x_k-\alpha|}{|x_0-\alpha|} \le L^k$ ... dipende da L (ovvero da proprietà di h)

- **Metodo di Newton**

$f \in C^2$, $f'(x) \neq 0$: è il metodo ad un punto def da $\boxed{h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$

PROPRIETÀ:
- $x = h(x)$ equiv $f(x) = 0$;
- SE α zero di f, $\exists [a,b]$ che verifica ip teo conv locale;
- SE α zero di f, $h'(\alpha) = 0 \Rightarrow$ OdC ad α almeno 2

Oss (interpr geometrica del metodo):



retta tang al grafico di f in x_{k-1}:

$$y = f'(x_{k-1})(x - x_{k-1}) + f(x_{k-1})$$

$\bar{x}$ t.c. $f'(x_{k-1})(\bar{x} - x_{k-1}) + f(x_{k-1}) = 0$

OVVERO: $\bar{x} = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} = h(x_{k-1})$ | METODO delle TANGENTI

Oss (scelta del punto iniziale): $[a,b]$, $f \in C^2[a,b]$, $c \in [a,b]$ t.c.

(1) $\exists \alpha$ zero di f in $[a,b]$
(2) $\forall x \in [a,b]$, $f'(x) \neq 0$ ($\Rightarrow \alpha$ è l'UNICO zero di f in $[a,b]$), $f''(x) \neq 0$
(3) $f(c) f''(c) > 0$

ALLORA: la success gen dal m. di NewT. a partire da c è convergente ad α, ed è monotona.

(dim: ragionam geometrico...)

Es: $f(x) = x^2 - 2$;

- # zeri = 2 : $\alpha_1 \in [-2,-1]$, $\alpha_2 \in [1,2]$
- Posso utilizz m. di Newt per approx α_2?
  $f \in C^2[1,2]$, $f'(x) = 2x \neq 0$ su $[1,2] \Rightarrow \exists [a,b]$ che verif ip (1), (2) del teo conv loc...
- Come trovo c che generi succes conv?
  1) Cerco $[a,b]$ che verif ip (1) e (2) del teo conv loc (so che esiste!) e poi scelgo l'estremo...

  OPPURE

  2) cerco di utilizz l'Oss precedente:
  - $\alpha_2 \in [1,2]$ zero di $f \in C^2[1,2]$
  - $\forall x \in [1,2]$, $f'(x) = 2x \neq 0$, $f''(x) = 2 \neq 0$
  - $f(2) f''(2) = 2 \cdot 2 > 0$

  $\Rightarrow$ la success gen dal m. di Newt a partire da $c = 2$ converge ad α_2, ed è monotona decrescente.

Es: Sia $f(x) = \operatorname{sen} x$; per appross lo zero in $[3,4]$ (ovvero π) si utilizza il m. di Newt. Indicare $x_0 \in \mathbb{R}$ a partire dal quale la success generata è convergente (op in $\mathbb{R}$).

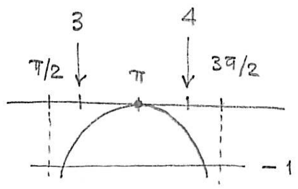
Sol: • su $[3,4]$ si ha: $f \in C^2$, $\exists$ zero, $f' \neq 0$ $(f'(x) = \cos x \dots)$

MA $f''(x)$ non è $\neq 0$ per ogni $x \in [3,4]$ — $f''(\pi) = 0$.

• NON possiamo utilizz l'Oss per la scelta del punto iniziale...

Alternativa...

• $h(x) = x - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = x - \operatorname{tg} x$; $h'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$



• $\forall x \in [3,4]$, $h'(x) \leq 0$;

• $h'(x) = -1$ per $1 - \frac{1}{\cos^2 x} = -1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}$

• $\frac{3\pi}{4}$ — 3 — $\frac{5\pi}{4}$ — 4 $\Rightarrow$ $[3,4]$ non verif ip (2) del Teo conv loc

• $\pi < \frac{7}{2} < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \left[3, \frac{7}{2}\right]$ verifica ip (1) e (2) del Teo conv loc

• 3 — π — $13/4$ — $7/2$, $\pi < \frac{13}{4} \Rightarrow$ punto iniziale "buono": $c = 3$

> **Oss:** dalla costruz grafica, si osserva che la success non è monotona! (ed anche utilizz la dim del Teo conv loc...)

> **Es:** Per i metodi ad un punto, l'$\exists$ di $[a,b]$ che verif ip (1) e (2) del Teo di conv loc, dipende "solo" da $h'(\alpha)$. Da cosa dip l'$\exists$ di $[a,b]$ che verif ip (1) e (2) dell'Oss sulla scelta del punto iniz per il m. di Newt?

... da fare...

(I) condizionam del problema

(II) stabilità (operando in M...)

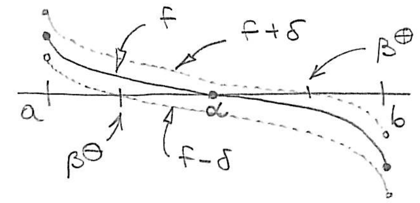
(III) criteri d'arresto.

• **CONDIZIONAMENTO:** **Oss:** $[a,b]$, $f \in C^1[a,b]$, $\delta > 0$ t.c. $\begin{cases} f' \neq 0 \text{ su } [a,b] \\ f(a)f(b) < 0 \\ |f(a)|, |f(b)| > \delta \end{cases}$

(e) g continua su $[a,b]$ t.c. $\forall x \in [a,b]$, $|f(x) - g(x)| \leq \delta$

$\Rightarrow$ • $\exists \beta$ zero di g in $[a,b]$

• $f(\beta) - f(\alpha) = \begin{cases} f(\beta) \\ f'(\theta)(\beta - \alpha) \dots \end{cases}$ ... con $\theta \in [a,b]$



$\beta^{\ominus} \leq \beta \leq \beta^{\oplus}$

dunque $\beta - \alpha = \frac{f(\beta)}{f'(\theta)}$ e q. di (A) $|\beta - \alpha| \leq \frac{\delta}{\min |f'(x)|}$

(B) se δ piccolo: $|\beta - \alpha| \approx \frac{\delta}{|f'(\alpha)|}$

$|\beta - \alpha|$ "errore assoluto TRASM dai DATI"

δ "errore assoluto sui DATI"

> **Es:** $F(x) = x^2$, $\exists$ zero in $[-1,1]$; NON verif Oss: $\forall \delta > 0$, $F(x) + \delta$ non ha zeri in $[-1,1]$

• **STABILITÀ:** Siano
* h, $[a,b]$ che verif ip Teo conv loc con $L \in [0,1)$
* $\varphi: M \to M$ t.c. $|\varphi(\xi) - h(\xi)| \leq \delta$ per $\forall \xi \in [a,b] \cap M$
* $\xi_0, \xi_1 = \varphi(\xi_0), \dots \in [a,b] \cap M$

ALLORA: $|\xi_k - \alpha| \leq L^k |\xi_0 - \alpha| + \frac{1 - L^k}{1 - L} \delta$ (α p.u. di h in $[a,b]$)

ovvero: $\underbrace{\overbrace{\;\alpha\;}^{\text{incertezza con } \delta = 0}}_{\text{incertezza con } \delta \neq 0}$ (al passo k)

per $k \to \infty$:
$L^k |\xi_0 - \alpha| \to 0$
$\frac{1 - L^k}{1 - L} \delta \to \frac{\delta}{1 - L}$

• **CRITERI d'ARRESTO:**

(A) h, $[a,b]$ che verif ip Teo conv loc; φ: $|h(\xi) - \varphi(\xi)| < \delta$; ξ_0 come sopra;

dato $E > 0$, SE $|\xi_k \ominus \xi_{k-1}| < E$ ALLORA stop

motivo: op in $\mathbb{R}$ si avrebbe...

• $|x_{k-1} - \alpha| \leq |x_{k-1} - x_k| + |x_k - \alpha| \leq |x_k - x_{k-1}| + L|x_{k-1} - \alpha|$

e q. di: $|x_{k-1} - \alpha| \leq \frac{|x_k - x_{k-1}|}{1 - L}$

inoltre: $x_k - x_{k-1} = h(x_{k-1}) - h(x_{k-2}) = h'(\theta)\,(x_{k-1} - x_{k-2})$

perciò ... $\begin{cases} |x_k - x_{k-1}| \le L\,|x_{k-1} - x_{k-2}| \\ |x_k - x_{k-1}| \le L^{k-1}\,|x_1 - x_0| \end{cases}$ $\Rightarrow$ $|x_k - x_{k-1}|$ decrescente ... e $\lim_{k\to\infty} |x_k - x_{k-1}| = 0$.

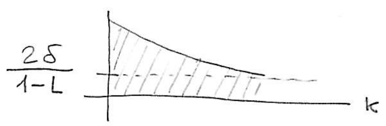
criterio EFFICACE!

• op in M si ha: $|\xi_{k-1} - \alpha| \le \dfrac{|\xi_k - \xi_{k-1}|}{1-L} + \dfrac{\delta}{1-L}$

e: $\xi_k - \xi_{k-1} = \varphi(\xi_{k-1}) - \varphi(\xi_{k-2}) = \varphi(\xi_{k-1}) - h(\xi_{k-1}) + h(\xi_{k-1}) - h(\xi_{k-2}) + h(\xi_{k-2}) - \varphi(\xi_{k-2})$

$\Rightarrow |\xi_k - \xi_{k-1}| \le 2\delta + L\,|\xi_{k-1} - \xi_{k-2}|$ "quasi decrescente"...

... e $|\xi_k - \xi_{k-1}| \le 2\delta\,\dfrac{1-L^{k-1}}{1-L} + L^{k-1}\,|\xi_1 - \xi_0|$



Oss:
- criterio utilizz per ξ_k succesn gen da metodo def da φ...
- scegliere E troppo piccolo è inutile!
- situazione "pericolosa": $L \simeq 1$.

(B) ψ: $|\psi(\xi) - f(\xi)| \le \delta$; $f \in C^1[a,b]$, $f' \neq 0$ su $[a,b]$, $m = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)|$

dato $E > 0$, $\boxed{\text{SE } |\psi(\xi_k)| < E \text{ ALLORA stop}}$

motivo: op in $\mathbb{R}$ si avrebbe... $|x_k - \alpha| = \dfrac{|f(x_k)|}{|f'(\theta)|} \le \dfrac{|f(x_k)|}{m}$

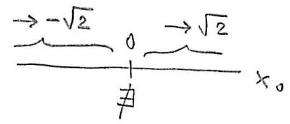
(e, se $x_k \to \alpha$, $f(x_k) \to 0$ ...)

• op in M si ha: $|\xi_k - \alpha| \le \dfrac{|\psi(\xi_k)| + \delta}{m}$

Oss:
- criterio utilizz per "ξ_k qualsiasi"...
- scegliere E troppo piccolo è inutile
- situazione "pericolosa": $m \simeq 0$.

Es: $f(x) = x^2 - 2$; $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, decidere cosa accade utilizz m. di NewT (op in $\mathbb{R}$) a partire da x_0.

(Sol:



)

Es: $h(x) = \begin{cases} x/2 & \text{per } x \ge 0 \\ 2x & \text{per } x < 0 \end{cases}$; det pti uniti di h e $\forall x_0$ decidere cosa accade utilizz il m. it def da h (op in $\mathbb{R}$) a partire da x_0.

2 SISTEMI di EQUAZIONI LINEARI

Pb: dati $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile, $b \in \mathbb{R}^n$
determinare $x^* \in \mathbb{R}^n$ t.c. $Ax^* = b$.

Oss: A invertibile significa (propr equivalenti)

- $\det A \neq 0$
- $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$
- $\ker(A) = \{0\}$
- colonne (righe) di A sono elem lin indip (q. di BASE) di $\mathbb{R}^n$
- $\exists!\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ t.c. $AB = BA = I$ (notaz: $B = A^{-1}$)
- $\forall b \in \mathbb{R}^n,\ \exists!\ x^* \in \mathbb{R}^n$ t.c. $Ax^* = b$

Casi semplici

(D) A diagonale ($a_{ij} = 0$ per $i \neq j$)

- invertibile $\Leftrightarrow$ $a_{kk} \neq 0$ per $k = 1, \dots, n$
- soluzione: $x_k = b_k / a_{kk}$, $k = 1, \dots, n$

(T) A triangolare ($a_{ij} = 0$ per $\begin{cases} i > j & \text{SUPERIORE} \\ i < j & \text{INFERIORE} \end{cases}$)

- invertibile $\Leftrightarrow$ $a_{kk} \neq 0$ per $k = 1, \dots, n$
- soluzione: TS) SOSTITUZ ALL'INDIETRO...
  TI) SOSTITUZ IN AVANTI (Es: descrivere procedure!)

(O) A ortogonale (propr equivalenti: (I) colonne di A base o.n. di $\mathbb{R}^n$ (risp p.s. canonico!) (II) A invertibile e $A^{-1} = A^T$ (III) $A^T A = I$)

- invertibile sicuramente
- soluzione:

$$Ax^* = b \Leftrightarrow A^T A x^* = A^T b$$
$$\Leftrightarrow \boxed{x^* = A^T b}$$

$x = SI(T, c)$

dati: $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tr sup, $c \in \mathbb{R}^n$

uscita: se T invert, $x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $Tx = c$

se $(t_{11} \neq 0, \dots, t_{nn} \neq 0)$ **allora**

- $x_n = c_n / t_{nn}$;
- **per** $k = n-1, \dots, 1$ **ripeti**
  - $s_k = c_k - (t_{k,k+1} x_{k+1} + \dots + t_{k,n} x_n)$;
  - $x_k = s_k / t_{kk}$;

altrimenti STOP (matrice non invertibile).

Oss: la procedura SI descrive una funzione, anch'essa di nome SI. Il dominio della funzione — ovvero l'ins delle coppie T, c per le quali la procedura definisce il vettore x — è

$$\{(T, c) \text{ t.c. } T \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ tr. sup invert, } c \in \mathbb{R}^n\}$$

(P) A matrice di permutazione (le colonne di A sono una permutazione degli elem della base canonica di $\mathbb{R}^n$)

Oss: A di permutaz... • A è ortogonale • $v \in \mathbb{R}^n$, le comp di Av...

- invertibile certamente
- soluzione: $x^* = A^T b$ (le comp si ottengono permutando...)

Es: • $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; determ $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ di perm tale che $Pv = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

• $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; determ $P \underset{\in\, \mathbb{R}^4}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}}$ e $(1, 2, 3, 4) P \in \mathbb{R}^{1\times 4}$.

Caso generale

idea: fattorizzare A con fattori semplici...

Es: (I) fattorizz LR $S, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ t.c.

- S tr inf con $s_{kk} = 1$ (invert!)
- D tr sup
- $A = SD$

Oss: A invert $\Leftrightarrow$ D invert!

(II) fattorizz QR $U, T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ t.c.

- U ortogonale (invertibile!)
- T tr sup
- $A = UT$

Oss: A invert $\Leftrightarrow$ T invert!

... poi (uso della fattorizz $A = MN$):

$Ax = b$ è la stessa eq di $MNx = b$

0) cambio variabile: $Nx = c$ (N invert!)
1) risolvere $Mc = b$ (caso semplice) ... ricavo c
2) risolvere $Nx = c$ (" ") ... ricavo x

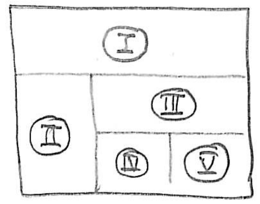
$\boxed{\text{Pb: determ fattorizz di } A.}$

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$; cerco fatt LR ...

ovvero: $s_{21}, \dots, d_{33}$ t.c. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_{21} & 1 & 0 \\ s_{31} & s_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ 0 & d_{22} & d_{23} \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$

Soluzione: considerare le 9 eq ottenute uguagliando gli elementi

nell'ordine di figura:



ovvero: 1ª riga, 1ª colonna; 2ª riga, 2ª colonna; ...

(METODO di DOOLITTLE).

Oss: $k\in\{1,\dots,n-1\}$, $v\in\mathbb{R}^n$ t.c. $v_k\neq 0$; posto

$$l = (\underbrace{0,\dots,0}_{k}, \frac{v_{k+1}}{v_k},\dots,\frac{v_n}{v_k})^T \in\mathbb{R}^n, \qquad H = I - l e_k^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

si ha:

- H è tr inf con $h_{jj}=1$, $j=1,\dots,n$
- $Hv = (v_1,\dots,v_k,0,\dots,0)^T$
- $\forall w\in\mathbb{R}^n$ con $w_k=0$, $Hw=w$

$\boxed{\text{notazione: } H=\lambda(v,k)}$

- $H^{-1} = I + l e_k^T$ (infatti...)

Es: $k=2$, $v=(1,2,4,6)^T$

- $v_2 = 2 \neq 0$
- $l = (0,0,2,3)^T$

- $l e_2^T = \begin{bmatrix}0\\0\\2\\3\end{bmatrix}(0,1,0,0) = \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&2&0&0\\0&3&0&0\end{bmatrix} = (0,l,0,0)$
- $H = I - l e_2^T = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-2&1&0\\0&-3&0&1\end{bmatrix}$, $Hv = \begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix}$, $H^{-1} = \dots$

$(S,D) = EG(A)$

dati: $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$;

uscita: se termina, (S,D) fattorizz LR di A;

$A^{(1)} = A$;

per $k=1,\dots,n-1$ ripeti

  se $a_{kk}^{(k)}\neq 0$ allora   ($a_{kk}^{(k)}$: k-esimo PIVOT)

   • $H_k = \lambda(a_k^{(k)},k)$;

   • $A^{(k+1)} = H_k A^{(k)}$

  altrimenti STOP (k-esimo pivot nullo)

$D = A^{(n)}$; $S = H_1^{-1}\cdots H_{n-1}^{-1}$.

Es: $A = \begin{bmatrix}2&1&0\\4&0&1\\6&1&-1\end{bmatrix}$; $A^{(1)} = A$;

- $k=1$, $a_{11}^{(1)} = 2 \neq 0$: $H_1 = \lambda(a_1^{(1)},1) = \begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}$, $A^{(2)} = H_1A^{(1)} = \begin{bmatrix}2&1&0\\0&-2&1\\0&-2&-1\end{bmatrix}$
- $k=2$, $a_{22}^{(2)} = -2 \neq 0$: $H_2 = \lambda(a_2^{(2)},2) = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$, $A^{(3)} = H_2A^{(2)} = \begin{bmatrix}2&1&0\\0&-2&1\\0&0&-2\end{bmatrix}$

$$(S,D) = \left(\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2&1&0\\0&-2&1\\0&0&-2\end{bmatrix}\right) = EG(A)$$

$\boxed{\text{Oss: } d_{kk} = a_{kk}^{(k)},\ k=1,2,\dots,n}$

Oss:
- $A^{(n)}$ è tr sup (ad ogni passo si "azzera" una colonna...);
- H_k^{-1} è tr inf con 1 sulla diagonale $\Rightarrow$ $S = H_1^{-1}\cdots H_{n-1}^{-1}$ è tr inf con $s_{jj}=1$ (verificare!)
- $A^{(n)} = H_{n-1}A^{(n-1)} = \dots = H_{n-1}\cdots H_1 A \Rightarrow A = (H_1^{-1}\cdots H_{n-1}^{-1})A^{(n)} = SD$.

Es (calcolo di S):

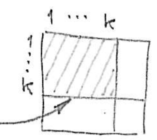
$H_1 = \begin{bmatrix}1&0&0\\\lambda_{21}&1&0\\\lambda_{31}&0&1\end{bmatrix}$, $H_2 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&\lambda_{32}&1\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $H_1^{-1}H_2^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\-\lambda_{21}&1&0\\-\lambda_{31}&-\lambda_{32}&1\end{bmatrix}$ (verificare!)

(Oss: è sempre vero!)

Pb: non sempre EG è definita (non sempre EG termina)   Es: $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$

def (minori principali di testa):

$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $k\in\{1,\dots,n\}$; $A[k]$



"minore principale di testa (di ordine k)"

TEO (insieme di def di EG):

EG è def in $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ (ovvero: $a_{kk}^{(k)}\neq 0$ per $k=1,\dots,n-1$) $\iff$ $\det A[k]\neq 0$ per $k=1,\dots,n-1$

(dim: no)

Es: $\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$ no, $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ sì, $\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ no

Oss: (I) se S,D è fatt LR di A con $d_{kk}\neq 0$, $k=1,\dots,n-1$, allora $\exists!$ fatt LR di A (dim: con $n=3$, usare Doolittle)

Q. di: $\boxed{\text{SE EG è def in } A, \text{ ALLORA } EG(A) \text{ è l'unica fatt}}$

(II) $\boxed{A \text{ invertibile. Se EG non è def in } A, \text{ allora } \nexists \text{ fatt LR}}$

(dim: no)

	EG d	EG nd
i	$\exists!$	$\nexists$
ni	$\exists!$	$\nexists / \exists_\infty$

relaz tra ins def EG ed esistenza di fatt LR

Es: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\nexists$ fatt, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\exists_\infty$ fatt

Es: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $A(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \alpha & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -\alpha \end{bmatrix}$

1) determ per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ EG è def in $A(\alpha)$;

2) discutere $\exists$ di fatt LR di $A(\alpha)$.

Sol: 1) EG è def $\forall \alpha \neq 1/2$

2) Per $\alpha \neq 1/2$ la fatt è unica, per $\alpha = 1/2$ $\nexists$ fatt.

Es: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; utilizz la fatt LR ricavata in precedenza per risolvere il sistema $Ax = b$.

(Sol: ...)

Classi di matrici per le quali EG è def ($\Rightarrow \exists!$ fatt LR)

- PDF (predominanza diagonale forte)
- SDP (simmetriche def positive)

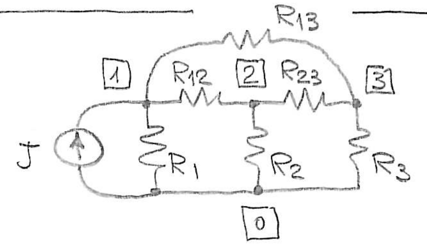
def (PDF): $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è a p.d.f se

- $|a_{kk}| > \sum_{i\neq k} |a_{ki}|$, $k=1,\dots,n$ (per RIGHE)
- $|a_{kk}| > \sum_{i\neq k} |a_{ik}|$, $k=1,\dots,n$ (per COLONNE)

Es: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ pdf per righe, non per colonne ; $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ non pdf

Oss: A pdf $\Rightarrow a_{kk} \neq 0$ per $k=1,\dots,n$

Es:



usando LKC:

$$\begin{bmatrix} J \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1+G_{12}+G_{13} & -G_{12} & -G_{13} \\ -G_{12} & G_2+G_{12}+G_{23} & -G_{23} \\ -G_{13} & -G_{23} & G_3+G_{13}+G_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

($G = 1/R$, V_i = diff di pot $\boxed{i} - \boxed{0}$)

- la matrice è a PDF per ogni valore (positivo) delle resistenze!

PROPRIETÀ (PDF): (I) A è PDF $\Rightarrow$ $A[k]$ è PDF, $k=1,\dots,n$
(II) A è PDF $\Rightarrow$ $\det A \neq 0$

dim: (I) ovvio ; (II) si dim che PDF $\Rightarrow$ ($Ax=0 \Rightarrow x=0$)...

allora

> (I) + (II): A è PDF $\Rightarrow$ $\det A[k] \neq 0$ per $k=1,\dots,n-1$
> q.di (Teo ins def EG): EG è def in A.

Es: Decidere se la proprietà di PDF sussiste (per la matr dell'Es. precedente) ponendo, rispettivamente:
(1) $G_1 = 0$ (ovvero eliminando R_1), (2) $G_{12} = 0$.

def (SDP): $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e SDP se
- A è simmetrica ($A^T = A$)
- $\forall v \neq 0$, $Av \cdot v > 0$ (ps canonico)

> Es: • $\alpha I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è simm $\forall \alpha \in \mathbb{R}$; $v^T(\alpha I v) = \alpha v^T v = \alpha \|v\|^2$
> è SDP $\Leftrightarrow \alpha > 0$ (Es: $\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ SDP $\Leftrightarrow \lambda_1>0,\dots,\lambda_n>0$)
>
> • $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ è simm ; $v^T J_2 v = 2 v_1 v_2$ e $J_2 v \cdot v = 0$
> per, ad es, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: J_2 non è SDP.

PROPRIETÀ (SDP): (I) A è SDP $\Rightarrow$ $A[k]$ è SDP per $k=1,\dots,n$
(II) A è SDP $\Rightarrow$ $\det A \neq 0$

dim: (I) no ; (II) si dim che SDP $\Rightarrow$ ($Ax=0 \Rightarrow x=0$).

allora

> (I)+(II): A è SDP $\Rightarrow$ $\det A[k] \neq 0$ per $k=1,\dots,n-1$
> q.di (Teo ins def EG): EG è def in A.

Oss: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, SDP. Allora la fatt LR di A (S, D) è t.c.
(I) $D = \mathrm{diag}(d_{11},\dots,d_{nn})\, S^T$; (II) $d_{11}>0,\dots,d_{nn}>0$
(dim: ...)

<u>Oss</u>: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, simm; <u>SE</u> EG è def in A e $(S,D) = EG(A)$ con $d_{11} > 0, \dots, d_{nn} > 0$ <u>ALLORA</u> A è SDP.

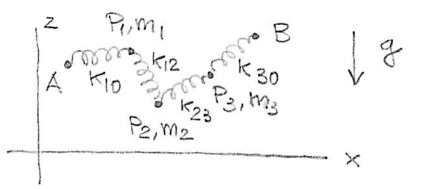
(<u>dim</u>: ...)

<u>TEO</u> (caratterizz SDP): $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simm.

A è SDP $\Leftrightarrow$ $(S,D) = EG(A)$ con $d_{11} > 0, \dots, d_{nn} > 0$ $\Leftrightarrow$ $\det A[k] > 0$ per $k = 1, \dots, n$

(<u>dim</u>: prima parte segue da <u>Oss.</u> precedente; seconda parte...)

<u>Es</u>:



$A \equiv (x_A, z_A)$, $B \equiv (x_B, z_B)$
$P_k \equiv (x_k, z_k)$, $k_{ij} > 0$, $g > 0$, $m_k > 0$
(molle "ideali")

Eq. per l'equilibrio (asse x):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_{10}+k_{12} & -k_{12} & 0 \\ -k_{12} & k_{12}+k_{23} & -k_{23} \\ 0 & -k_{23} & k_{30}+k_{23} \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{10}x_A \\ 0 \\ k_{30}x_B \end{bmatrix}$$

(asse z): $$C \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{10}z_A - m_1 g \\ -m_2 g \\ k_{30}z_B - m_3 g \end{bmatrix}$$

<u>Oss</u>:
- i due sist hanno la <u>stessa matrice</u>
- C non è PDF
- C è SDP (<u>dim</u>: ...)

<u>Es</u> (per casa): ricavare le eq di equilibrio.

<u>Es</u>: $\forall x \in \mathbb{R}$, $A(x) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & x & x \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix}$; determ per quali $x \in \mathbb{R}$ la matrice $A(x)$ risulta SDP.

<u>Es</u>: $\forall x \in \mathbb{R}$, $B(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$; determ per quali $x \in \mathbb{R}$ la matrice $B(x)$ risulta SDP e per quali SDN.
(def: ... $Ax \cdot x < 0$)

<u>Es</u> (per casa): usando le def, decidere se la matr del circuito (lez precedente) sia SDP.

<u>Pb</u>: cosa fare se EG non def in A

<u>Es</u> (pivoting): $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

<u>def</u>: P_{ij} è la matr di perm che scambia riga i con riga j.

- $A^{(1)} = A$; $A^{(2)} = H_1 P_{12} A$; $A^{(3)} = H_2 P_{23} A^{(2)}$ è tr sup...
- $A^{(3)} = (H_2 P_{23} H_1 P_{12}) A$ ovvero: $A = (P_{12}^T H_1^{-1} P_{23}^T H_2^{-1}) A^{(3)}$
- <u>ma</u> $P_{12}^T H_1^{-1} P_{23}^T H_2^{-1}$ non è tr inf con 1 sulla diag (*)
- $P = P_{23} P_{12}$, $P(P_{12}^T H_1^{-1} P_{23}^T H_2^{-1})$ è tr inf con 1 sulla diag (*)

Q.di: $\boxed{S = P(P_{12}^T H_1^{-1} P_{23}^T H_2^{-1}),\ D = A^{(3)} \text{ è fatt LR di } PA}$

- $A = P^T S D$; $(P; S, D) = EGP(A)$

<u>Es</u>: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ... $A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ... EGP non def in A.

<u>TEO</u> (nis def EGP): $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$

EGP è def in A $\Leftrightarrow$ $a_1, \dots, a_{n-1}$ lin indip

(<u>dim</u>: no)

<u>Oss</u>:
- (uso EGP per soluz sistemi)
  1) $(P; S, D) = EGP(A)$
  2) $Sc = Pb$ (con SA)
  3) $Dx = c$ (con SI)

Procedura <u>soddisf</u> (op in $\mathbb{R}$): <u>SE</u> A invert <u>TROVA</u> la soluz <u>ALTRIM</u> si arresta

- (unicità) <u>Es</u>: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$; applicare EGP utilizz (1) P_{12} (2) P_{13} e confrontare le fatt ottenute.

Fattorizzazione QR

def: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; (U,T) è fatt QR di A se
- $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonale
- $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tr sup
- $A = UT$

Es (procedim di calcolo): $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

PASSO 1: determinare $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ a colonne ortogonali e Θ tr sup con $\theta_{kk} = 1$ t.c. $\Omega\Theta = A$

- $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \begin{bmatrix} 1 & \theta_{12} & \theta_{13} \\ 0 & 1 & \theta_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \omega_1\theta_{12} + \omega_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \omega_1\theta_{13} + \omega_2\theta_{23} + \omega_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$\omega_1 = \dots$

$\theta_{12} = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \omega_1}{\omega_1 \cdot \omega_1}$, $\omega_2 = \dots$

$\theta_{13} = \dfrac{\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \omega_1}{\omega_1 \cdot \omega_1}$, $\theta_{23} = \dfrac{\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \omega_2}{\omega_2 \cdot \omega_2}$, $\omega_3 = \dots$

PASSO 2: $W = \mathrm{diag}(\|\omega_1\|, \|\omega_2\|, \|\omega_3\|)$, $U = \Omega W^{-1}$, $T = W\Theta$
- U è ortogonale
- T è tr. sup
- $UT = (\Omega W^{-1})(W\Theta) = \Omega\Theta = A$

> TEO ($\exists$ fatt QR): $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile; $\exists$ fatt QR di A
> (e il procedim descritto sopra ne trova una)
>
> (dim: no)

Es (continua): A come Es precedente, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$;
Utilizz fatt QR trovato per risolvere l'eq $Ax = b$.

Oss:
- per calcolare fatt QR (op in $\mathbb{R}$) è necess $\sqrt{\cdot}$!
- (unicità): posto $\gamma_k \in \{1,-1\}$, $k = 1,2,3$, SE U, T è fatt QR di A, anche $U\,\mathrm{diag}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$, $\mathrm{diag}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\,T$ lo è.

---

da fare:
- condiz del Pb.
- studio in $F(\beta, m)$
- costo.

Preliminari: NORME in $\mathbb{R}^n$ e NORME di MATRICE

Fatti noti: $\mathbb{R}^n$ sp vett su $\mathbb{R}$ con ps canonico;
$N: v \to \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$ norma euclidea di v;

> def (norma, sp normato): V sp vett su $\mathbb{R}$; $N: V \to \mathbb{R}$ norma in V SE
> (I) $\forall v$, $N(v) \geq 0$ e $N(v) = 0 \Rightarrow v = 0$;
> (II) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall v$, $N(\alpha v) = |\alpha|\, N(v)$ $(\Rightarrow N(0) = 0)$
> (III) $\forall v, w$, $N(v+w) \leq N(v) + N(w)$ (disug triangolare)
>
> (V, N) spazio normato

Es: $N_1: v \to |v_1| + \dots + |v_n| = \|v\|_1$ (dim...)
$N_\infty: v \to \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\} = \|v\|_\infty$

> Oss: N_1, N_∞ non derivano da ps in $\mathbb{R}^n$ (dim: Oss. 0.35 p. 14)

def (intorno sferico): $\mathcal{I}_N(v, \rho) = \{w \in \mathbb{R}^n : N(w - v) \leq \rho\}$
ρ raggio, v centro

> Es: disegnare $\mathcal{I}_N(0,1)$ in $\mathbb{R}^2$ per N_1, N_2, N_∞.

def (norma di matrice): Si cons $(\mathbb{R}^n, N)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\sup\left\{\frac{N(Av)}{N(v)},\ v \neq 0\right\} = \|A\|_N$$

norma di A indotta da N

> Es: $(\mathbb{R}^n, N)$, $\|I\|_N = 1$

Oss: $\sup\{\#\} < +\infty$ (Es: $N_\infty(Av) \leq (\|a_1\|_\infty + \dots + \|a_n\|_\infty)\, N_\infty(v)$)

Es (formule per il calcolo):

- $N_1(A) = \max\{N_1(a_1), \dots, N_1(a_n)\} = \|A\|_1$
- $N_\infty(A) = N_1(A^T) = \|A\|_\infty$
- $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; $\|A\|_1 = 15$, $\|A\|_\infty = 13$

$N_2(A) = \dots$

PROPRIETÀ

- $N(Av) \le \|A\|_N \, N(v)$ (dim ...)
- $\|AB\|_N \le \|A\|_N \, \|B\|_N$ (Es: dimostrare!)

- (int geom): $\|A\|_N = \max\{N(Av),\ N(v) = 1\}$

se A invert: $\|A^{-1}\|_N = \left(\min\{N(Av),\ N(v)=1\}\right)^{-1}$

Es:

- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; dim che $\|A\|_1 \ge \max|a_{ij}|$
- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invert; dim che $\|A\|_N \, \|A^{-1}\|_N \ge 1$ $(\Rightarrow \|A\| \ne 0)$
- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invert, $b \in \mathbb{R}^n$, x^* t.c. $Ax^* = b$;

dim che

$$\frac{N(b)}{\|A\|_N} \le N(x^*) \le \|A^{-1}\|_N \, N(b)$$

Condizionamento

- dati: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, invert; $b \in \mathbb{R}^n$

* soluz: $x^* = A^{-1}b$

- dati perturbati: $A + \delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invert; $b + \delta b \in \mathbb{R}^n$ — perturbaz sui dati

* soluz del Pb perturbato: $\hat{x}$

def: $(\mathbb{R}^n, N)$, errore relativo sui dati: $\dfrac{\delta A}{\|A\|_N}$, $\dfrac{\delta b}{\|b\|_N}$;

err relativo trasm dai dati:

$$\frac{\hat{x} - x^*}{\|x^*\|_N}, \quad \frac{\hat{x} - x^*}{\|\hat{x}\|_N}$$

FUNZIONE di CONDIZIONAMENTO

$$\frac{\hat{x} - x^*}{\|x^*\|_N} = F\left(A, b; \frac{\delta A}{\|A\|_N}, \frac{\delta b}{\|b\|_N}\right)$$

Es: $\gamma \in (0,1)$, $A(\gamma) = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1/\gamma \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$; $\delta b = \begin{bmatrix} \delta b_1 \\ \delta b_2 \end{bmatrix}$, $\delta A = 0$

- $\det A(\gamma) = 1$
- soluz di $A(\gamma)x = b$: $x^* = \begin{bmatrix} b_1/\gamma \\ \gamma b_2 \end{bmatrix}$
- soluz sist perturbato $A(\gamma)x = b + \delta b$: $\hat{x} = \begin{bmatrix} (b_1 + \delta b_1)/\gamma \\ \gamma(b_2 + \delta b_2) \end{bmatrix}$

I caso: $b_1 \ne 0$, $b_2 = 0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\hat{x} - x^*}{\|x^*\|_\infty} = \begin{bmatrix} \delta b_1/\gamma \\ \gamma \delta b_2 \end{bmatrix} \dfrac{\gamma}{|b_1|} = \dfrac{\begin{bmatrix} \delta b_1 \\ \gamma^2 \delta b_2 \end{bmatrix}}{\|b\|_\infty}$ (f. di condizion.)

POSTO $\epsilon_d = \dfrac{\|\hat{x} - x^*\|_\infty}{\|x^*\|_\infty}$, $\epsilon_b = \dfrac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$: $\epsilon_d \le \epsilon_b$

Pb. "ben condizionato": $(\forall \delta b,\ \epsilon_d \lesssim \epsilon_b)$

II caso: $b_1 = 0$, $b_2 \ne 0$, $\delta b_2 = 0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\hat{x} - x^*}{\|x^*\|_\infty} = \dfrac{1}{\gamma|b_2|}\begin{bmatrix} \delta b_1/\gamma \\ 0 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\gamma^2} \dfrac{\delta b}{\|b\|_\infty}$ (f. di cond.)

... $\epsilon_d = \dfrac{1}{\gamma^2}\epsilon_b$

Pb. "mal condizionato": $(\exists\, \delta b : \epsilon_d \gg \epsilon_b)$

Studio delle f di condiz   CN/ $\boxed{43}$, $\boxed{44}$, $\boxed{45}$ 12 maggio 2009 (B32)

• $\boxed{\text{CASO } \delta A = 0}$ $x^* = A^{-1}b$, $\hat{x} = A^{-1}(b+\delta b)$, $\hat{x} - x^* = A^{-1}\delta b$

$Ax^* = b \Rightarrow \|b\| \leq \|A\|\,\|x^*\|$

$$\frac{\hat{x}-x^*}{\|x^*\|} = \frac{A^{-1}\delta b}{\|x^*\|} = \frac{\|b\|}{\|x^*\|} A^{-1}\frac{\delta b}{\|b\|} \Rightarrow \epsilon_d = \frac{\|\hat{x}-x^*\|}{\|x^*\|} \leq \boxed{\|A\|\,\|A^{-1}\|}\,\epsilon_b$$

$\mu(A)$ "NUMERO di CONDIZIONAM" di A (in norma ...)

TEO ($\delta A = 0$): $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$;

$\epsilon_d \leq \mu(A)\,\epsilon_b$ e $\exists\, b, \delta b \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\epsilon_d = \mu(A)\,\epsilon_b$

Es (continua): • $\|A(\gamma)\|_\infty = \frac{1}{\gamma}$, $\|A^{-1}(\gamma)\|_\infty = \frac{1}{\gamma}$, $\mu_\infty(A) = \frac{1}{\gamma^2}$

$\Rightarrow \epsilon_d \leq \frac{1}{\gamma^2}\epsilon_b$; $b = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix}$, $\delta b = \begin{bmatrix} \delta b_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sono ...

• $\boxed{\text{CASO } \delta b = 0}$ Posto $\hat{\epsilon}_d = \frac{\|\hat{x} - x^*\|}{\|\hat{x}\|}$, $\epsilon_A = \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$:

TEO ($\delta b = 0$): $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$;

$\hat{\epsilon}_d \leq \mu(A)\,\epsilon_A$ e $\exists\, b, \delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ t.c. $\hat{\epsilon}_d = \mu(A)\,\epsilon_A$

Oss: SE $\mu(A) \gg 1$, $\exists\, b \in \mathbb{R}^n$, $\delta b \in \mathbb{R}^n$, $\delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ t.c.

ϵ_d oppure $\hat{\epsilon}_d \gg \epsilon_b, \epsilon_A$ (Pb. mal condiz)

ALTRIMENTI, $\forall b \in \mathbb{R}^n$, $\delta b \in \mathbb{R}^n$, $\delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

si ha ϵ_d e $\hat{\epsilon}_d \approx \epsilon_b, \epsilon_A$ (Pb. ben condiz)

Oss: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mu(A) \geq 1$ per ogni norma (indotta)

Es: $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$
• Calcolare $\|A\|_1$
• Calcolare $\|Ae_k\|_1$ per $k = 1,2,3$ e dedurne una stima per $\mu_1(A)$

• stimare $\|A\|_2$ e $\mu_2(A)$.

Oss: $\|A\|_1 = \max\{\|Ax\|_1,\ \|x\|_1 = 1\}$
$\|A^{-1}\|_1 = \left(\min\{\|Ax\|_1,\ \|x\|_1 = 1\}\right)^{-1}$
$\Rightarrow \mu_1(A) = \frac{\max\{\dots\}}{\min\{\dots\}}$

Es: $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tr sup ; • $\|T\|_1 \geq \max_k |t_{kk}|$

• se T invert, $\|T^{-1}\|_1 \geq \max_k |t_{kk}^{-1}| = \left(\min_k |t_{kk}|\right)^{-1}$

Es: $\gamma \in (0,1)$, $A(\gamma) = \begin{bmatrix} \gamma & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

• determ fatt LR con EG (o EGP)
• discutere il condizionamento del fattore destro.

Oss: $\mu_\infty(A(\gamma)) = (1+\gamma)^2 < 4$ (Pb ben condizionato) MA
$\mu_\infty(D(\gamma)) \geq \frac{1}{\gamma^2}$, quindi arb. grande (Pb mal condiz):
• $A(\gamma)x = b$ è equivalente a $D(\gamma)x = c(\gamma)$ nel senso che hanno la stessa soluzione
• le proprietà di condiz di $D(\gamma)x = c(\gamma)$ sono peggiori di quelle del sist originario !

Rimedio: usare EGPP (elim di Gauss con pivoting PARZIALE):

al passo k si utilizza come pivot un elem $a_{ik}^{(k)}$ t.c.

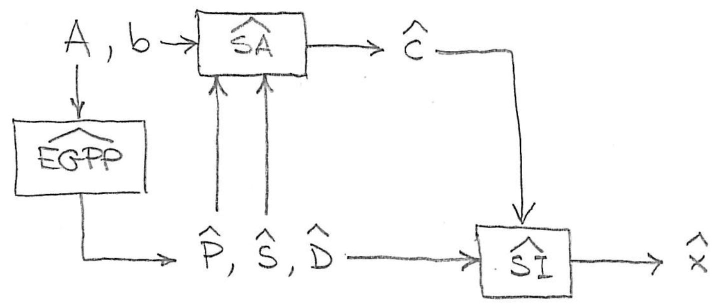
$$|a_{ik}^{(k)}| = \max\{ |a_{jk}^{(k)}|,\ j = k, \dots, n\}$$

Es: $A(\gamma) = \begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $k=1$, $A^{(1)} = A(\gamma)$,

- $\max\{ |a_{j1}^{(1)}|,\ j=1,2\} = |a_{21}^{(1)}|$;
- scambio riga 1 con riga 2 : $Z = P_{12} A^{(1)}$
- passo di elim : $H_1 = \lambda(z_1, 1)$, $A^{(2)} = H_1 Z = H_1 P_{12} A^{(1)}$
- $A^{(2)}$ è tr sup ; $A = (P_{12}^T H_1^{-1}) A^{(2)}$, ma $P_{12}^T H_1^{-1}$ non è tr inf con 1 sulla diagonale...
- ... $P_{12} (P_{12}^T H_1^{-1})$ è tr inf con 1 sulla diagonale

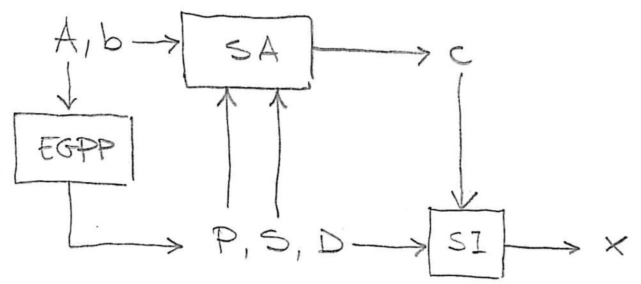
q.di : EGPP determina fatt LR di PA (come EGP...)

Oss : Utilizz il calcolatore si realizzano procedure che mirano ad appross EGPP, SI, SA e si utilizz :



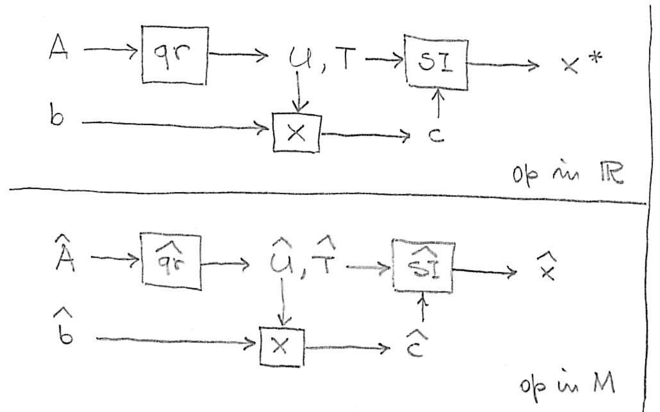
(op in M)

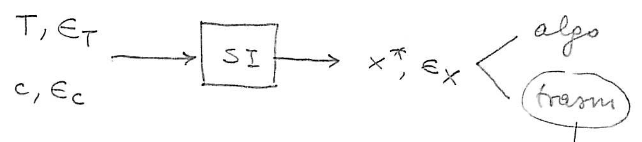
con l'intento di appross...



(op in $\mathbb{R}$)

Oss:





$\epsilon_d \le \mu(T)\,\epsilon_c$

$\hat{\epsilon}_d \le \mu(T)\,\epsilon_T$

Pb: quanto grande può essere $\mu(T)$ risp a $\mu(A)$?

Oss: in $(\mathbb{R}^n, N_2)$ si ha: $T = U^T A \Rightarrow \|T\|_2 \le \|A\|_2$; $T^{-1} = A^{-1}U \Rightarrow \|T^{-1}\|_2 \le \|A^{-1}\|_2$ } q. di: $\mu_2(A) \ge \mu_2(T)$

> ovvero: utilizz QR si ottiene un sist, equiv a quello iniziale, con condizionam <u>non peggiore</u>

COSTO def (costo aritmetico): # pseudo op eseguite per portare a termine...

Oss: (I) costo confronti = 0 ... ragionevole se "relativam pochi".
(II) costo pseudo-op indip da operandi (falso se op non lin!)

Es: ① $\Phi_1(a,b) = a_1 \overset{1}{\otimes} b_1 \overset{n+1}{\oplus} \cdots \overset{2n-1}{\oplus} a_n \overset{n}{\otimes} b_n$ $(\simeq a^T b)$ | costo: $nP + (n-1)S$ $\boxed{\sim n}$

② $\Phi_2(A,b) = \left(\Phi_1(\hat{a}_1^T, b), \dots, \Phi_1(\hat{a}_n^T, b)\right)^T$ $(\simeq Ab)$ | costo: $n^2 P + n(n-1)S$ $\boxed{\sim n^2}$

Oss: se A è, ad es, tr si ha $(\xi \otimes 0 = 0,\ \xi \oplus 0 = \xi)$

costo 1ª comp = $1P + 0S$

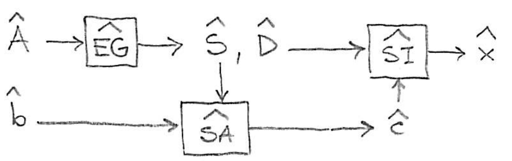
" 2ª comp = $2P + 1S$

ecc... costo $\Phi_2^{tr}(T,b) = \frac{n(n+1)}{2}P + \frac{n(n-1)}{2}S$ $\boxed{\sim \frac{n^2}{2}}$

③ $\Phi_3(T,c) = \widehat{SI}(T,c)$ $(\simeq SI(T,c))$ | costo: $nD + \frac{n(n-1)}{2}(P+S)$ $\boxed{\sim \frac{n^2}{2}}$

④ $\Phi_4(A) = \widehat{EG}(A)$ $(\simeq EG(A))$ | costo: $\frac{n^2+n}{2}D + \frac{2n^3-3n^2+n}{6}(P+S)$ $\boxed{\sim \frac{n^3}{3}}$

Oss:



costo: $\boxed{\sim \frac{n^3}{3}}$

3 INTERPOLAZIONE

def (pb dell'interp polinomiale):

dati: k intero ≥ 0

$[a,b]$ intervallo non degenere di $\mathbb{R}$

$P_k(\mathbb{R})$ = ins dei polin a coeff in $\mathbb{R}$ di grado $\le k$ (sottosp vett delle f continue da $[a,b]$ in $\mathbb{R}$)

$x_0, \dots, x_k$ punti <u>distinti</u> di $[a,b]$

$y_0, \dots, y_k \in \mathbb{R}$

determinare $p \in P_k(\mathbb{R})$ t.c. $p(x_0) = y_0, \dots, p(x_k) = y_k$ ("che interpolano i dati $(x_0,y_0), \dots, (x_k,y_k)$")

> Es: $k=2$, $[a,b] = [0,2]$, dati: $(0,1), (2,-1), (1,1)$
> - $x^2 - x + 2$ <u>non è</u> soluzione (per $x=0$ si ha ...)
> - $P_2(\mathbb{R}) = \{\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0\ ;\ \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$ (parametrizz di $P_2(\mathbb{R})$)
>
> Pb: cerco $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ t.c. posto $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ si abbia $p(0) = 1$, $p(2) = -1$, $p(1) = 1$ · <u>OVVERO</u> t.c. $\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ sia soluz del sist (di eq.ni lineari!)...

Oss: $P_k(\mathbb{R}) = \langle q_0(x), \dots, q_k(x) \rangle$ (ad es: $P_2(\mathbb{R}) = \langle 1, x, x^2 \rangle$),

cioè $P_k(\mathbb{R}) = \{\alpha_0 q_0(x) + \dots + \alpha_k q_k(x)\ ;\ \alpha_0, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$;

- $a_0 q_0(x) + \dots + a_k q_k(x)$ risolve <u>Pb</u> $\Leftrightarrow$ $(a_0, \dots, a_k)^T \in \mathbb{R}^{k+1}$ risolve il sist...

> Es: $P_k(\mathbb{R}) = \langle 1, \dots, x^k \rangle$; $p(x) = a_0 + \dots + a_k x^k$ risolve <u>Pb</u>
>
> $\Leftrightarrow (a_0, \dots, a_k)^T$ risolve il sist $\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^k \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_k & \cdots & x_k^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$

def (pb dell'interp polin)

dati : k, $[a,b]$, $P_k(\mathbb{R})$; $x_0,\dots,x_k$; $y_0,\dots,y_k$

determ $p \in P_k(\mathbb{R})$ t.c. $p(x_0)=y_0, \dots, p(x_k)=y_k$ (p che interpolano i dati $(x_0,y_0),\dots$)

TEO (esist ed unicita') :

$\exists!\ p \in P_k(\mathbb{R})$ che risolve il Pb dell'int polinomiale.

(dim : usando base di LAGRANGE ...)

Es : $k=2$, $[a,b]=[0,2]$, dati : $(0,1)$, $(2,-1)$, $(1,1)$

- det l'elem di $P_2(\mathbb{R})$ che int i dati utilizz la base di LAGRANGE, poi quella di VANDERMONDE ($1, x, x^2$) e verif che i polinomi trovati sono uguali.

Oss : basi diverse di $P_k(\mathbb{R}) \Rightarrow$ forme diverse del p. che interpola.

Es : $k=2$,
- $\langle l_0, l_1, l_2 \rangle$ base e forma di LAGRANGE (matr identica)
- $\langle 1, x, x^2 \rangle$ base e forma di VANDERMONDE (matr di V.)
- $\langle 1, x-x_0, (x-x_0)(x-x_1) \rangle$ base e forma di NEWTON (matr tr inf)

Es : dati $(0,1)$, $(-1,2)$, $(3,10)$, $(1,10)$

- det f. di Newton del polinomio che interpola ("interpolante")
- stessa domanda per dati permutati $(-1,2)$, $(1,10)$, $(0,1)$, $(3,10)$.

def (pb. lineare di interp) :

dati : k, $[a,b]$; $\mathcal{V}$ sottosp vett delle f cont da $[a,b]$ in $\mathbb{R}$, $\dim \mathcal{V} = k+1$; $x_0,\dots,x_k$; $y_0,\dots,y_k$

determ $v \in \mathcal{V}$ t.c. $v(x_0)=y_0, \dots, v(x_k)=y_k$

Es : $k=2$; $[a,b]=[0,2\pi]$; $\mathcal{V} = \langle 1, \operatorname{sen} x, \cos x \rangle$, $\dim \mathcal{V} = 3$ (Es : dim!)

- $x_0=0$, $x_1=\pi$, $x_2=2\pi$
- $x_0=0$, $x_1=\pi/2$, $x_2=\pi$

studiare il Pb dell'interpolaz.

CAMPIONAMENTO E RICOSTRUZIONE

def (f. di campionamento, f. di ricostruzione) :

k intero ≥ 0, $t_0,\dots,t_k \in [a,b]$ distinti

- $c : \mathcal{C}[a,b] \to \mathbb{R}^{k+1}$ t.c. $c(f) = (f(t_0),\dots,f(t_k))^T$ — istanti di campionamento

"funzione di campionamento agli istanti $t_0,\dots,t_k$"

Oss : c è LINEARE e NON INVERTIBILE — $\exists f_1 \neq f_2 : c(f_1)=c(f_2)$

- $r : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathcal{C}[a,b]$

"funzione di ricostruzione (relativa a c)" SE lineare, $\forall y \in \mathbb{R}^{k+1}$, $c(r(y))=y$

Es (ricostruz ottenuta con INTERP POLINOMIALE) :

- $t_0,\dots,t_k$ ist campionam (distinti) ; c f. di camp a $t_0,\dots,t_k \in [a,b]$
- $r : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathcal{C}[a,b]$ t.c : $r\left(\begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}\right)$ = l'elem di $P_k(\mathbb{R})$ che int i dati $(t_0,y_0),\dots,(t_k,y_k)$

Allora : r è f. di ricostruz rel a c (dim: ...)

def (err di ricostruzione) : $t_0,\dots,t_k$ ist camp ; c f. di camp, r f di ricostr...

- $e : \mathcal{C}[a,b] \to \mathbb{R}$ t.c. $e(f) = \max_{t\in[a,b]} |f(t) - r(c(f))(t)|$

ERRORE di RICOSTRUZIONE

TEO (errore di ricostr, con int polin) :

- $t_0,\dots,t_k \in [a,b]$, $f \in \mathcal{C}^{k+1}[a,b]$, $p_k \in P_k(\mathbb{R})$ il p. che int i dati $(t_0, f(t_0)),\dots$

Allora : $\forall t \in [a,b]$, $\exists \theta \in [a,b]$ t.c.

$$f(t) - p_k(t) = \frac{f^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}(t-t_0)\cdots(t-t_k) \qquad \text{(dim: no)}$$

Es : $[a,b]=[0,2\pi]$, $f(t)=\operatorname{sen} t$; $\forall k$, $|f^{(k)}(t)| \leq 1$ e $|t-t_k| \leq 2\pi$

$$\Rightarrow |f(t)-p_k(t)| \leq \frac{(2\pi)^{k+1}}{(k+1)!} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

OVVERO : per ottenere $e(f)$ piccolo quanto si vuole, è suff prendere k abbastanza elevato (e scegliere arbitrariam gli ist!)

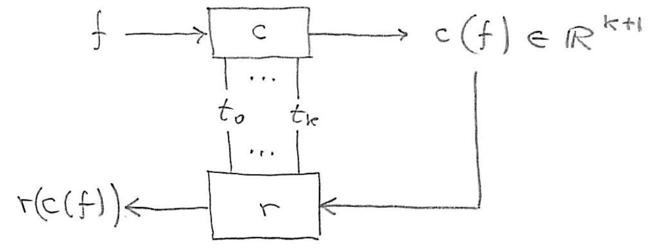
Es: $[a,b] = [0,1]$, $f(t) = \begin{cases} t \operatorname{sen} \frac{\pi}{t} & t \in (0,1] \\ 0 & t = 0 \end{cases}$

- $t_j = \frac{1}{j+1}$, $j = 0, 1, \dots$
- $f(t_j) = \frac{1}{j+1} \operatorname{sen}[(j+1)\pi] = 0 \Rightarrow p_k = 0$ per ogni k

q. di $f(t) - p_k(t) = f(t)$ e $e(f) \not\to 0$ per $k \to \infty$

Oss: QUALUNQUE f. di ricostr rel a c fornisce $r(c(f)) = 0$ perciò $e(f) \not\to 0$.

Oss:



RICOSTRUZIONE con INTERPOLAZIONE POLINOMIALE:
$$r(c(f)) = p_k(t)$$

- $f \in \mathcal{C}^\infty([a,b],\mathbb{R})$, $\quad M_j = \max_{t\in[a,b]} |f^{(j)}(t)|$

$$e(f) = \max_{t\in[a,b]} |f(t) - p_k(t)| \le \frac{M_{k+1}}{(k+1)!}(b-a)^{k+1}$$

$\boxed{\text{SE}}$ M_j non cresce troppo rapidam con j $\boxed{\text{ALLORA}}$ $e(f) \xrightarrow{k\to\infty} 0$

(con scelta ARBITRARIA degli ist di campionamento)

> • Es: $f(t) = \operatorname{sen}\omega t$, $\quad M_j = \omega^j$
> $f(t) = e^{\alpha t}$, $\quad M_j = \alpha^j e^{\alpha b}$

ALTRIMENTI: (I) $\forall f \in \mathcal{C}$, $\exists$ criterio di scelta degli ist t.c. $e(f) \xrightarrow{k\to\infty} 0$
(ma... QUALE?)

(II) $\forall$ criterio di scelta degli ist, $\exists f \in \mathcal{C}$ t.c. $e(f) \not\xrightarrow{k\to\infty} 0$

- CONCLUSIONE: ricostr con int polin NON SODDISFACENTE!

---

def (f cont lin a tratti): $a < b \in \mathbb{R}$, $\quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$,
$I_j = [t_{j-1}, t_j]$, $\quad j = 1,\dots,k$

$f \in S$ se
- f continua su $[a,b]$
- $\forall j\ \exists p_j \in P_1(\mathbb{R})$ t.c. $f = p_j$ su I_j

$\boxed{S: \text{ins delle funzioni continue lineari a tratti (su } I_1,\dots,I_j)}$

Oss: (I) dati $I_1,\dots,I_j$, S è ssv di $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$; (Es: dimostrare!)

(II) dati $y_0,\dots,y_k \in \mathbb{R}$, $\exists!\ \sigma \in S$ che interpola i dati $(t_0,y_0),\dots,(t_k,y_k)$
(dim: $\forall j\ \exists!$ elem di $P_1(\mathbb{R})$ che interpola $(t_{j-1},y_{j-1}),(t_j,y_j)$)

(III) Siano $s_0,\dots,s_k \in S$ t.c. $s_j(t_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\ne j\end{cases}$

- $s_0,\dots,s_k$ sono una base di S (dim: ...)

dunque: $\boxed{\dim S = k+1}$

Es: $t_j = 0,1,2,3,4,5$
- determ I_j
- disegnare il grafico di $s_0,\dots,s_5$
- determ l'elem che interpola i dati $(0,3),(1,1),(2,-1),(3,3),(4,0),(5,-2)$.

Oss (ricostr ottenuta con f cont lin a tratti):

dati $t_0 < t_1 < \dots < t_k$, S ins delle f cont lin a tratti (su...)

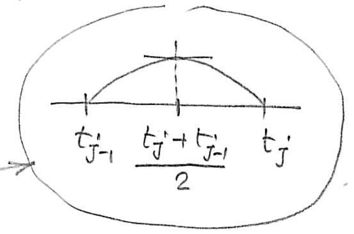
- $r: \mathbb{R}^{k+1} \to \mathcal{C}([t_0,t_k],\mathbb{R})$ t.c. $r\left(\begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k\end{bmatrix}\right)$ = l'elem di S che interpola i dati $(t_0,y_0),\dots,(t_k,y_k)$.

(I) r è f. di ricostr nel a c ("ottenuta con f cont lin a tratti")

(II) $f \in \mathcal{C}^2([t_0,t_k],\mathbb{R})$, $\quad M_2 = \max_{t\in[t_0,t_k]} |f^{(2)}(t)|$

- $t \in I_j$, $\quad |f(t) - r(c(f))(t)| = |f(t) - p_j(t)| \le$ (l'elem di $P_1(\mathbb{R})$ che int i dati...)

$$\le \frac{M_2}{2}|t-t_{j-1}||t-t_j| \le \frac{M_2}{2}\left[\frac{t_j - t_{j-1}}{2}\right]^2$$

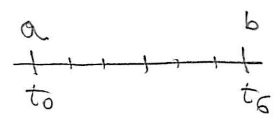


$\Rightarrow$ posto $h = \max\{t_1 - t_0, \dots, t_k - t_{k-1}\}$ si ha:

> $e(f) \le \frac{M_2}{8}h^2$
>
> SE gli ist di camp sono scelti in modo che $\lim_{k\to\infty} h = 0$,
> ALLORA $e(f) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Es: $t_j = a + \frac{b-a}{k}j$, $\quad j = 0,\dots,k$; $\quad h = \frac{b-a}{k} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} h = 0$

(

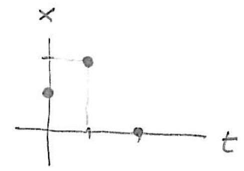


$k=6$ ist "equidistanti")

Es: Un punto materiale si muove, su una retta, con moto UNIFORMEMENTE ACCELERATO con accelerazione a, velocita' iniziale ("a $t=0$") v_0 e ascissa iniziale x_0.

Determ a, v_0, x_0 sapendo che:

$$\boxed{\begin{array}{l} x(0) = 1 \\ x(1) = 2 \\ x(2) = 0 \end{array}} \longrightarrow$$



Sol: 1) moto unif accelerato $\Rightarrow$ $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \in \langle 1, t, t^2 \rangle$

2) cerco $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ t.c. $\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ interpola i dati ...

3) eq da risolvere (base e matr di Vandermonde):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \ldots \text{ soluzione (unica!)}: \begin{bmatrix} 1 \\ 5/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

4) moto: $x(t) = 1 + \frac{5}{2}t - \frac{3}{2}t^2 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ v_0 = 5/2 \\ a = -3 \end{array}}$

Es: decidere se le funzioni $t, 2^t, 3^t$ siano lin indip su $[-1, 1]$.

Sol: $\boxed{\text{lin indip} \iff \alpha_1 t + \alpha_2 2^t + \alpha_3 3^t = 0 \text{ solo per } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0}$

- siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ t.c. posto $g(t) = \alpha_1 t + \alpha_2 2^t + \alpha_3 3^t$ si abbia $g(t) = 0 \quad \forall t \in [-1, 1]$ ...
- ... allora: $g(-1) = 0$, $g(0) = 0$, $g(1) = 0$, ovvero:

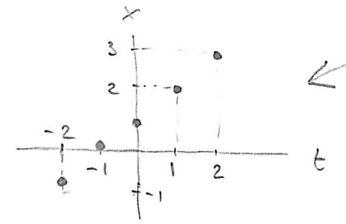
$$\begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- siccome matr invertibile: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \Rightarrow$ lin. indip.

Es: un punto materiale si muove, su una retta, con moto UNIFORME di velocita' v e posizione x_0 all'ist $t = 0$;

determ v ed x_0 sapendo che

$$\boxed{\begin{array}{ll} x(0) = 1 & x(-1) = 0{,}1 \\ x(1) = 2 & x(-2) = -0{,}9 \\ x(2) = 3 & \end{array}}$$



Sol: dati (misure...) incompatibili!

- moto uniforme $\Rightarrow$ $x(t) = vt + x_0 \in \langle 1, t \rangle$
- cerco α_0, α_1 t.c. $\alpha_0 + \alpha_1 t$ interpola i dati ...
- sistema da risolvere:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}} \underset{\alpha}{\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}} = \underset{b}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0{,}1 \\ -0{,}9 \end{bmatrix}}$$

- $\nexists$ soluzione: eq. 1 & 2 $\Rightarrow$ $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$, MA non e' soluz!

Oss: I dati sono ottenuti con misure — ciascuna potenzialm affetta da errore — dunque "ragionevole" che nessun moto unif sia compatibile.

RICHIESTA RAGIONEVOLE: determ moto "meno incompatibile"...

traduz matematica:

$$\boxed{\text{errore associato al moto unif individuato da } \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R} \; : \; N(A\alpha - b)}$$

norma in $\mathbb{R}^5$

Pb: determinare $\alpha^* \in \mathbb{R}^2$ che rende minimo l'errore ...
... $\alpha^* \in \mathbb{R}^2$ t.c. $\forall \alpha' \in \mathbb{R}^2$, $N(A\alpha^* - b) \leq N(A\alpha' - b)$

Oss:
- Scelte diverse di N portano a diversi valori di α^*
- la scelta di N dipende dal problema (può esserci una norma "naturale"...)
- Scelte diverse di N portano a Pb più o meno difficili da affrontare.

def (soluz di un sist nel senso dei m.q): $\mathbb{R}^k$ con ps canonico;

dati: $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$

$x^* \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\forall x' \in \mathbb{R}^n$, $\|Ax^*-b\|_2^2 \le \|Ax'-b\|_2^2$

è SOLUZIONE dell'eq $Ax=b$ NEL SENSO dei MINIMI QUADRATI

Oss: x^* t.c. $\|Ax^*-b\|_2^2 \le \|Ax'-b\|_2^2$, $\forall x'$

$\iff$ x^* t.c. $\|Ax^*-b\|_2 \le \|Ax'-b\|_2$, $\forall x'$

TEO: $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ a colonne lin indip ($\Rightarrow k \ge n$), $b \in \mathbb{R}^k$
- A^TA è invertibile;
- $\exists!$ soluz dell'eq $Ax=b$ nel senso dei m.q: $\boxed{x^* = (A^TA)^{-1}A^Tb}$

dim:

1) A^TA invert $\iff$ $A^TAx=0$ solo se $x=0$;
- $A^TAx=0 \Rightarrow x^TA^TAx=0 \iff \|Ax\|_2^2=0 \Rightarrow x=0$ (per l'ip...)

2) $x' \neq x^*$; $\|Ax'-b\|_2^2 = \|(Ax'-Ax^*)+(Ax^*-b)\|_2^2 =$

$= \|Ax'-Ax^*\|_2^2 + 2\,\underbrace{(Ax^*-b)\cdot(Ax'-Ax^*)} + \|Ax^*-b\|_2^2$

$= (A(x'-x^*))^T(Ax^*-b) =$

$= (x'-x^*)^T\underbrace{A^T(Ax^*-b)}_{=0 \text{ (per def. di } x^*)}$

dunque: $\|Ax'-b\|_2^2 = \|A(x'-x^*)\|_2^2 + \|Ax^*-b\|_2^2$

Ma: $x' \neq x^* \Rightarrow x'-x^* \neq 0 \xRightarrow{\text{(per l'ip su A)}} A(x'-x^*) \neq 0 \Rightarrow \|A(x'-x^*)\|_2^2 > 0$

q.di: $\|Ax'-b\|_2^2 > \|Ax^*-b\|_2^2$

Oss: $x^* = (A^TA)^{-1}A^Tb$ è la soluz del sistema

$A^TA\,x = A^Tb$ — SISTEMA delle EQUAZIONI NORMALI

$A^TA \to \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica, def positiva

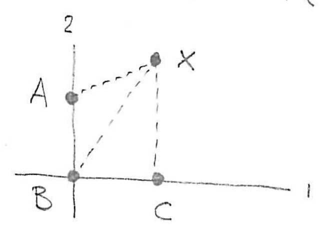
dim: $A^TAx \cdot x = x^TA^TAx =$
$= \|Ax\|_2^2 > 0$, $\forall x \neq 0$ ...

Es (continua): per l'eq. $A\alpha=b$ dell'es precedente si ha
- colonne di A lin indip (in $\mathbb{R}^5$)
- $A^TA = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ (colonne di A ortog risp ps canonico...)
- $(A^TA)^{-1}A^T = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$
- $x^* = (A^TA)^{-1}A^Tb = \dots$ e il moto "migliore" è ...

Es: In un piano cartesiano sono assegnati i punti $A=\binom{0}{1}$, $B=\binom{0}{0}$, $C=\binom{1}{0}$. Determ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che, posto $x=\binom{x_1}{x_2}$, la funzione

$$F(x_1,x_2) = d(A,x)^2 + d(B,x)^2 + d(C,x)^2$$

assuma valore minimo.



Sol: $x = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$; la richiesta va tradotta nella ricerca della soluz di un'eq nel senso dei m.q...

CN / 56, 57   29 maggio 2009 (C01)

def (fatt QR, caso rettangolare): $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, a colonne lin indip;

(U,T) è fatt QR di A se

- $U \in \mathbb{R}^{k \times n}$ a colonne ortonormali (risp ps canonico)
- $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tr sup
- $A = UT$

Oss: il procedim di calcolo è analogo al caso "quadrato"...

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$;

PASSO 1: cerchiamo $\Omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ a colonne ortogonali e $\Theta \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tr sup con $\Theta_{kk} = 1$ tali che $\Omega\Theta = A$ ...

$$A = (\omega_1, \omega_2)\begin{pmatrix} 1 & \theta_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \omega_1}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \omega_1 \theta_{12} + \omega_2$$

$$\omega_1 \cdot \omega_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \omega_1 = \|\omega_1\|^2 \theta_{12}, \quad \boxed{\theta_{12} = \frac{3}{3} = 1}$$

q. di: $\boxed{\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \omega_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$

ovvero: $$A = \underset{\Omega}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{\Theta}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

PASSO 2: otteniamo la fatt QR normalizzando le colonne di Ω ...

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{\underset{U}{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underset{T}{\begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}}}$$

Oss (uso della fatt QR per risolvere le eq. normali):

- $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ a colonne lin indip, $b \in \mathbb{R}^k$
- U, T fatt QR di A

Allora: $\boxed{\text{il sistema } A^T A x = A^T b \text{ è equivalente al sistema } Tx = U^T b}$

dim:
- $A = UT \Rightarrow A^T A = T^T U^T U T = T^T T$,
  $A^T b = T^T U^T b$

- $Tx = 0 \Rightarrow UTx = 0$ ovvero $Ax = 0$; colonne di A lin indip $\Rightarrow x = 0$ dunque T invertibile $\Rightarrow T^T$ invertibile ...

- $A^T A x = A^T b$ si riscrive $T^T T x = T^T U^T b$ ed è equivalente a $Tx = U^T b$.

Es : utilizz la fatt QR della matr dell' Es precedente per determin la soluz del sist $Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ nel senso dei m.q.

Sol : $Tx = U^T b$ ... $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -1/6 \\ x_2 = 1/2 \end{array}$

Oss : $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ t.c. $\|a_1\|_2 = 1$, $\|a_2\| = \lambda > 1$, $a_1 \cdot a_2 = 0$;

Allora :

- $A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$, $\|A^TA\|_2 = \lambda^2$ (infatti...)
- $(A^TA)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\lambda^2 \end{pmatrix}$, $\|(A^TA)^{-1}\|_2 = 1$

$\Rightarrow \mu_2(A^TA) = \lambda^2$

Inoltre :

- $A = \left(a_1, \frac{a_2}{\lambda}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ è fatt QR di A
- $\|T\|_2 = \lambda$, $\|T^{-1}\|_2 = 1 \Rightarrow \mu_2(T) = \lambda = \sqrt{\mu_2(A^TA)}$

relaz valida SEMPRE

Ovvero : i sistemi $A^TA x = A^T b$ e $Tx = U^T b$ sono equivalenti MA il secondo ha una matrice con condiz migliore di quella del primo !

Interessanti perché :

$A, b \rightarrow$ calcolatore $\rightarrow (A^TA)^*, (A^Tb)^*$, con $(A^TA)^* \approx A^TA$, $(A^Tb)^* \approx A^Tb$

$A, b \rightarrow$ calcolatore $\rightarrow T^*, (U^Tb)^*$, con $T^* \approx T$, $(U^Tb)^* \approx U^Tb$

in entrambi i casi si tenta di risolvere un sist con dati perturbati...