def (fatt QR, caso rettangolare): $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, a colonne lin indip;

(U, T) è fatt QR di A se

- $U \in \mathbb{R}^{k \times n}$ a colonne ortonormali (risp ps canonico)
- $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tr sup
- $A = UT$

Oss: il procedim di calcolo è analogo al caso "quadrato"...

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$;

PASSO 1: cerchiamo $\Omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ a colonne ortogonali e $\Theta \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tr sup con $\theta_{kk} = 1$ tali che $\Omega\Theta = A$ ...

$$A = (\omega_1, \omega_2) \begin{pmatrix} 1 & \theta_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \omega_1}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \omega_1 \theta_{12} + \omega_2$$

$$\omega_1 \cdot \omega_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \omega_1 = \|\omega_1\|^2 \theta_{12}, \quad \boxed{\theta_{12} = \frac{3}{3} = 1}$$

q. di: $\boxed{\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \omega_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$

ovvero: $A = \underset{\Omega}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{\Theta}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$

PASSO 2: otteniamo la fatt QR normalizzando le colonne di Ω ...

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}}$$

Oss (uso della fatt QR per risolvere le eq. normali):

- $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ a colonne lin indip, $b \in \mathbb{R}^k$
- U, T fatt QR di A

Allora: il sistema $A^T A x = A^T b$ è equivalente al sistema $Tx = U^T b$

dim: • $A = UT \Rightarrow A^T A = T^T U^T U T = T^T T$, $A^T b = T^T U^T b$

• $Tx = 0 \Rightarrow UTx = 0$ ovvero $Ax = 0$; colonne di A lin indip $\Rightarrow x = 0$ dunque T invertibile $\Rightarrow T^T$ invertibile ...

• $A^T A x = A^T b$ si riscrive $T^T T x = T^T U^T b$ ed è equivalente a $Tx = U^T b$.

Es: utilizz la fatt QR della matr dell' Es precedente per determ la soluz del sist $Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ nel senso dei m.q.

Sol: $Tx = U^T b \; \dots \; \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -1/6 \\ x_2 = 1/2 \end{array}$

Oss: $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ t.c. $\|a_1\|_2 = 1$, $\|a_2\| = \lambda > 1$, $a_1 \cdot a_2 = 0$;

Allora:

- $A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$, $\|A^T A\|_2 = \lambda^2$ (infatti...)
- $(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\lambda^2 \end{pmatrix}$, $\|(A^T A)^{-1}\|_2 = 1$

$\Rightarrow \mu_2(A^T A) = \lambda^2$

Inoltre:

- $A = \left(a_1, \frac{a_2}{\lambda}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ è fatt QR di A
- $\|T\|_2 = \lambda$, $\|T^{-1}\|_2 = 1 \Rightarrow \boxed{\mu_2(T) = \lambda = \sqrt{\mu_2(A^T A)}}$

relaz valida SEMPRE

Ovvero: i sistemi $A^T A x = A^T b$ e $Tx = U^T b$ sono equivalenti MA il secondo ha una matrice con condiz migliore di quella del primo!

Interessante perché:

$$A, b \rightarrow \boxed{\text{calcolatore}} \rightarrow \begin{array}{cc} A^T A & A^T b \\ \wr & \wr \\ (A^T A)^*, & (A^T b)^* \end{array}$$

$$A, b \rightarrow \boxed{\text{calcolatore}} \rightarrow \begin{array}{cc} T^*, & (U^T b)^* \\ \wr & \wr \\ T & U^T b \end{array}$$

in entrambi i casi si tenta di risolvere un sist con dati perturbati...