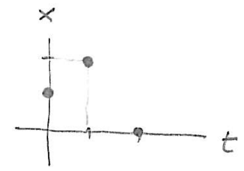
Es: Un punto materiale si muove, su una retta, con moto UNIFORMEMENTE ACCELERATO con accelerazione a, velocita' iniziale ("a $t=0$") v_0 e ascissa iniziale x_0.

Determ a, v_0, x_0 sapendo che:

$$\boxed{\begin{array}{l} x(0) = 1 \\ x(1) = 2 \\ x(2) = 0 \end{array}}$$



Sol: 1) moto unif accelerato $\Rightarrow$ $x(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0 \in \langle 1, t, t^2 \rangle$

2) cerco $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ t.c. $\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ interpola i dati ...

3) eq da risolvere (base e matr di Vandermonde):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \ldots \text{ soluzione (unica!)}: \begin{bmatrix} 1 \\ 5/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

4) moto: $x(t) = 1 + \frac{5}{2} t - \frac{3}{2} t^2 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ v_0 = 5/2 \\ a = -3 \end{array}}$

Es: decidere se le funzioni $t, 2^t, 3^t$ siano lin indip su $[-1, 1]$.

Sol: $\boxed{\text{lin indip} \Leftrightarrow \alpha_1 t + \alpha_2 2^t + \alpha_3 3^t = 0 \text{ solo per } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0}$

- siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ t.c. posto $g(t) = \alpha_1 t + \alpha_2 2^t + \alpha_3 3^t$ si abbia $g(t) = 0 \quad \forall t \in [-1, 1]$ ...
- ... allora: $g(-1) = 0$, $g(0) = 0$, $g(1) = 0$, ovvero:

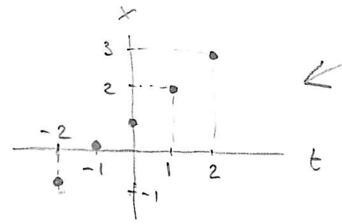
$$\begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- siccome matr invertibile: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \Rightarrow$ lin. indip.

Es: un punto materiale si muove, su una retta, con moto UNIFORME di velocita' v e posizione x_0 all'ist $t = 0$;

determ v ed x_0 sapendo che

$$\boxed{\begin{array}{ll} x(0) = 1 & x(-1) = 0{,}1 \\ x(1) = 2 & x(-2) = -0{,}9 \\ x(2) = 3 & \end{array}}$$



Sol: dati (misure...) incompatibili!

- moto uniforme $\Rightarrow$ $x(t) = vt + x_0 \in \langle 1, t \rangle$
- cerco α_0, α_1 t.c. $\alpha_0 + \alpha_1 t$ interpola i dati ...
- sistema da risolvere:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}} \underset{\alpha}{\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}} = \underset{b}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0{,}1 \\ -0{,}9 \end{bmatrix}}$$

- $\nexists$ soluzione: eq. 1 & 2 $\Rightarrow$ $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$, MA non e' soluz!

> **Oss**: I dati sono ottenuti con misure — ciascuna potenzialm affetta da errore — dunque "ragionevole" che nessun moto unif sia compatibile.

RICHIESTA RAGIONEVOLE: determ moto "meno incompatibile"...

traduz matematica:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{errore associato al} \\ \text{moto unif individuato} \\ \text{da } \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}\end{array} : \underset{\text{norma in } \mathbb{R}^5}{N}(A\alpha - b)}$$

> **Pb**: determinare $\alpha^* \in \mathbb{R}^2$ che rende minimo l'errore ...
> ... $\alpha^* \in \mathbb{R}^2$ t.c. $\forall \alpha' \in \mathbb{R}^2$, $N(A\alpha^* - b) \leq N(A\alpha' - b)$

Oss:
- Scelte diverse di N portano a diversi valori di α^*
- la scelta di N dipende dal problema (può esserci una norma "naturale"...)
- Scelte diverse di N portano a Pb più o meno difficili da affrontare.

def (soluz di un sist nel senso dei m.q): $\mathbb{R}^k$ con ps canonico;

dati: $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$

$x^* \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\forall x' \in \mathbb{R}^n$, $\|Ax^*-b\|_2^2 \le \|Ax'-b\|_2^2$

è SOLUZIONE dell' eq $Ax=b$ NEL SENSO dei MINIMI QUADRATI

Oss: x^* t.c. $\|Ax^*-b\|_2^2 \le \|Ax'-b\|_2^2$, $\forall x'$

$\iff$ x^* t.c. $\|Ax^*-b\|_2 \le \|Ax'-b\|_2$, $\forall x'$

TEO: $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ a colonne lin indip ($\Rightarrow k \ge n$), $b \in \mathbb{R}^k$
- A^TA è invertibile;
- $\exists!$ soluz dell' eq $Ax=b$ nel senso dei m.q: $\boxed{x^* = (A^TA)^{-1}A^Tb}$

dim:

1) A^TA invert $\iff$ $A^TAx=0$ solo se $x=0$;
- $A^TAx=0 \Rightarrow x^TA^TAx=0 \iff \|Ax\|_2^2=0 \Rightarrow x=0$ (per l'ip...)

2) $x' \ne x^*$; $\|Ax'-b\|_2^2 = \|(Ax'-Ax^*)+(Ax^*-b)\|_2^2 =$

$= \|Ax'-Ax^*\|_2^2 + 2\,\underbrace{(Ax^*-b)\cdot(Ax'-Ax^*)} + \|Ax^*-b\|_2^2$

$= (A(x'-x^*))^T(Ax^*-b) =$

$= (x'-x^*)^T\underbrace{A^T(Ax^*-b)}_{=0 \text{ (per def. di } x^*)}$

dunque: $\|Ax'-b\|_2^2 = \|A(x'-x^*)\|_2^2 + \|Ax^*-b\|_2^2$

Ma: $x' \ne x^* \Rightarrow x'-x^* \ne 0 \xRightarrow{\text{(per l'ip su A)}} A(x'-x^*) \ne 0 \Rightarrow \|A(x'-x^*)\|_2^2 > 0$

q.di: $\|Ax'-b\|_2^2 > \|Ax^*-b\|_2^2$

Oss: $x^* = (A^TA)^{-1}A^Tb$ è la soluz del sistema

$(A^TA)\,x = A^Tb$ SISTEMA delle EQUAZIONI NORMALI

$A^TA \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica, def positiva

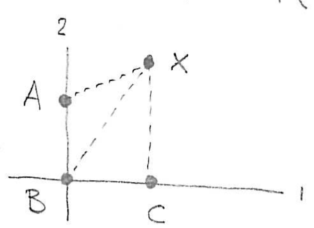
dim: $A^TAx \cdot x = x^TA^TAx =$
$= \|Ax\|_2^2 > 0$, $\forall x \ne 0$...

Es (continua): per l'eq. $A\alpha=b$ dell'es precedente si ha
- colonne di A lin indip (in $\mathbb{R}^5$)
- $A^TA = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ (colonne di A ortog risp ps canonico...)
- $(A^TA)^{-1}A^T = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$
- $x^* = (A^TA)^{-1}A^Tb = \dots$ e il moto "migliore" è...

Es: In un piano cartesiano sono assegnati i punti $A=\binom{0}{1}$, $B=\binom{0}{0}$, $C=\binom{1}{0}$. Determ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che, posto $x=\binom{x_1}{x_2}$, la funzione

$$F(x_1,x_2) = d(A,x)^2 + d(B,x)^2 + d(C,x)^2$$

assuma valore minimo.



Sol: $x = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$; la richiesta va tradotta nella ricerca delle soluz di un'eq nel senso dei m.q...