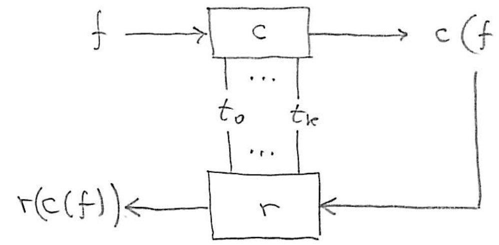
Oss:



RICOSTRUZIONE con INTERPOLAZIONE POLINOMIALE:

$$r(c(f)) = p_k(t)$$

• $f \in \mathcal{C}^\infty([a,b],\mathbb{R})$, $M_j = \max_{t\in[a,b]} |f^{(j)}(t)|$

$$e(f) = \max_{t\in[a,b]} |f(t) - p_k(t)| \leq \frac{M_{k+1}}{(k+1)!}(b-a)^{k+1}$$

$\boxed{\text{SE}}$ M_j non cresce troppo rapidam con j $\boxed{\text{ALLORA}}$ $e(f) \xrightarrow{k\to\infty} 0$

(con scelta ARBITRARIA degli ist di campionamento)

• Es: $f(t) = \operatorname{sen} \omega t$, $M_j = \omega^j$
$f(t) = e^{\alpha t}$, $M_j = \alpha^j e^{\alpha b}$

ALTRIMENTI: (I) $\forall f \in \mathcal{C}$, $\exists$ criterio di scelta degli ist t.c. $e(f) \xrightarrow{k\to\infty} 0$
(ma… QUALE?)

(II) $\forall$ criterio di scelta degli ist, $\exists f \in \mathcal{C}$ t.c. $e(f) \overset{k\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$

• CONCLUSIONE: ricostr con int polin NON SODDISFACENTE!

---

def (f cont lin a tratti): $a < b \in \mathbb{R}$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$,
$I_j = [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1,\dots,k$

$f \in S$ se
• f continua su $[a,b]$
• $\forall j\ \exists p_j \in P_1(\mathbb{R})$ t.c. $f = p_j$ su I_j

$\boxed{S\text{: ins delle funzioni continue lineari a tratti (su } I_1,\dots,I_j)}$

Oss: (I) dati $I_1,\dots,I_j$, S è ssv di $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$; (Es: dimostrare!)

(II) dati $y_0,\dots,y_k \in \mathbb{R}$, $\exists!\ \sigma \in S$ che interpola i dati $(t_0,y_0),\dots,(t_k,y_k)$
(dim: $\forall j\ \exists!$ elem di $P_1(\mathbb{R})$ che interpola $(t_{j-1},y_{j-1}),(t_j,y_j)$)

(III) Siano $s_0,\dots,s_k \in S$ t.c. $s_j(t_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq j \end{cases}$

• $s_0,\dots,s_k$ sono una base di S (dim: …)

dunque: $\boxed{\dim S = k+1}$

Es: $t_j = 0,1,2,3,4,5$
• determ I_j
• disegnare il grafico di $s_0,\dots,s_5$
• determ l'elem che interpola i dati $(0,3),(1,1),(2,-1),(3,3),(4,0),(5,-2)$.

Oss (ricostr ottenuta con f cont lin a tratti):

dati $t_0 < t_1 < \dots < t_k$, S ins delle f cont lin a tratti (su…)

• $r: \mathbb{R}^{k+1} \to \mathcal{C}([t_0,t_k],\mathbb{R})$ t.c. $r\left(\begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}\right)$ = l'elem di S che interpola i dati $(t_0,y_0),\dots,(t_k,y_k)$.

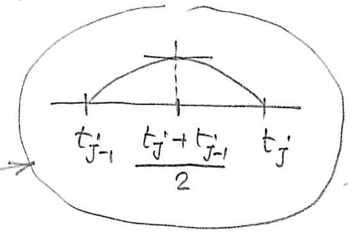
(I) r è f. di ricostr rel a c ("ottenuta con f cont lin a tratti")

(II) $f \in \mathcal{C}^2([t_0,t_k],\mathbb{R})$, $M_2 = \max_{t\in[t_0,t_k]} |f^{(2)}(t)|$

l'elem di $P_1(\mathbb{R})$ che int i dati…

• $t \in I_j$, $|f(t) - r(c(f))(t)| = |f(t) - p_j(t)| \leq$

$$\leq \frac{M_2}{2}|t-t_{j-1}||t-t_j| \leq \frac{M_2}{2}\left[\frac{t_j - t_{j-1}}{2}\right]^2$$



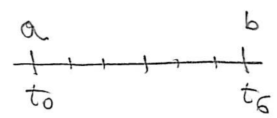
$\Rightarrow$ posto $h = \max\{t_1 - t_0,\dots,t_k - t_{k-1}\}$ si ha:

$$\boxed{e(f) \leq \frac{M_2}{8}h^2}$$

SE gli ist di camp sono scelti in modo che $\lim_{k\to\infty} h = 0$, ALLORA $e(f) \xrightarrow{k\to\infty} 0$

Es: $t_j = a + \frac{b-a}{k} j$, $j = 0,\dots,k$; $h = \frac{b-a}{k} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} h = 0$

(



$k=6$ ist "equidistanti")