def (pb dell'interp polin)

dati: k, $[a,b]$, $P_k(\mathbb{R})$; $x_0,\dots,x_k$; $y_0,\dots,y_k$

determ $p \in P_k(\mathbb{R})$ t.c. $p(x_0)=y_0,\dots,p(x_k)=y_k$ (p che interpolano i dati $(x_0,y_0),\dots$)

TEO (esist ed unicita'):

$\exists!\ p \in P_k(\mathbb{R})$ che risolve il Pb dell'int polinomiale.

(dim: usando base di LAGRANGE ...)

Es: $k=2$, $[a,b]=[0,2]$, dati: $(0,1)$, $(2,-1)$, $(1,1)$

- det l'elem di $P_2(\mathbb{R})$ che int i dati utilizz la base di LAGRANGE, poi quella di VANDERMONDE $(1, x, x^2)$ e verif che i polinomi trovati sono uguali.

Oss: basi diverse di $P_k(\mathbb{R}) \Rightarrow$ forme diverse del p. che interpola.

Es: $k=2$,
- $\langle \ell_0, \ell_1, \ell_2 \rangle$ base e forma di LAGRANGE (matr identica)
- $\langle 1, x, x^2 \rangle$ base e forma di VANDERMONDE (matr di V.)
- $\langle 1, x-x_0, (x-x_0)(x-x_1) \rangle$ base e forma di NEWTON (matr tr inf)

Es: dati $(0,1)$, $(-1,2)$, $(3,10)$, $(1,10)$

- det f. di Newton del polinomio che interpola ("interpolante")
- stessa domanda per dati permutati $(-1,2)$, $(1,10)$, $(0,1)$, $(3,10)$.

---

def (pb. lineare di interp):

dati: k, $[a,b]$; $\mathcal{V}$ sottosp vett delle f cont da $[a,b]$ in $\mathbb{R}$, $\dim \mathcal{V} = k+1$; $x_0,\dots,x_k$; $y_0,\dots,y_k$

determ $v \in \mathcal{V}$ t.c. $v(x_0)=y_0,\dots,v(x_k)=y_k$

Es: $k=2$; $[a,b]=[0,2\pi]$; $\mathcal{V} = \langle 1, \operatorname{sen} x, \cos x \rangle$, $\dim \mathcal{V} = 3$ (Es: dim!)

- $x_0 = 0$, $x_1 = \pi$, $x_2 = 2\pi$
- $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/2$, $x_2 = \pi$

} studiare il Pb dell'interpolaz.

CAMPIONAMENTO E RICOSTRUZIONE

def (f. di campionamento, f. di ricostruzione):

k intero ≥ 0, $t_0,\dots,t_k \in [a,b]$ distinti

- $c: \mathcal{C}[a,b] \to \mathbb{R}^{k+1}$ t.c. $c(f) = (f(t_0),\dots,f(t_k))^T$ — istanti di campionamento

  "funzione di campionamento agli istanti $t_0,\dots,t_k$"

  Oss: c è LINEARE e NON INVERTIBILE — $\exists\, f_1 \neq f_2 : c(f_1) = c(f_2)$

- $r: \mathbb{R}^{k+1} \to \mathcal{C}[a,b]$

  "funzione di ricostruzione (relativa a c)" SE lineare, $\forall y \in \mathbb{R}^{k+1}$, $c(r(y)) = y$

Es (ricostruz ottenuta con INTERP POLINOMIALE):

- $t_0,\dots,t_k$ ist campionam (distinti); c f. di camp a $t_0,\dots,t_k \in [a,b]$
- $r: \mathbb{R}^{k+1} \to \mathcal{C}[a,b]$ t.c.: $r\left(\begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}\right) =$ l'elem di $P_k(\mathbb{R})$ che int i dati $(t_0,y_0),\dots,(t_k,y_k)$

Allora: r è f. di ricostruz rel a c (dim: ...)

---

def (err di ricostruzione): $t_0,\dots,t_k$ ist camp; c f. di camp, r f di ricostr...

- $e: \mathcal{C}[a,b] \to \mathbb{R}$ t.c. $e(f) = \max_{t\in[a,b]} |f(t) - r(c(f))(t)|$

  ERRORE di RICOSTRUZIONE

TEO (errore di ricostr, con int polin):

- $t_0,\dots,t_k \in [a,b]$, $f \in \mathcal{C}^{k+1}[a,b]$, $p_k \in P_k(\mathbb{R})$ il p. che int i dati $(t_0, f(t_0)),\dots$

Allora: $\forall t \in [a,b]$, $\exists\, \theta \in [a,b]$ t.c.

$$f(t) - p_k(t) = \frac{f^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}(t-t_0)\cdots(t-t_k) \qquad (\text{dim: no})$$

Es: $[a,b]=[0,2\pi]$, $f(t) = \operatorname{sen} t$; $\forall k$, $|f^{(k)}(t)| \leq 1$ e $|t-t_k| \leq 2\pi$

$$\Rightarrow |f(t) - p_k(t)| \leq \frac{(2\pi)^{k+1}}{(k+1)!} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

OVVERO: per ottenere $e(f)$ piccolo quanto si vuole, è suff prendere k abbastanza elevato (e scegliere arbitrariam gli ist!)

Es: $[a,b]=[0,1]$, $f(t)=\begin{cases} t \operatorname{sen}\frac{\pi}{t} & t\in(0,1] \\ 0 & t=0 \end{cases}$

- $t_j = \frac{1}{j+1}$, $j=0,1,\dots$
- $f(t_j) = \frac{1}{j+1}\operatorname{sen}[(j+1)\pi] = 0 \Rightarrow p_k = 0$ per ogni k

q. di $f(t)-p_k(t) = f(t)$ e $e(f)\not\to 0$ per $k\to\infty$

$\boxed{\text{Oss: QUALUNQUE f. di ricostr rel a } c \text{ fornisce } r(c(f)) = 0 \text{ perciò } e(f)\not\to 0.}$