Studio delle f di condiz   CN/ 43, 44, 45   12 maggio 2009 (B32)

• $\boxed{\text{CASO } \delta A = 0}$ $x^* = A^{-1}b$, $\hat{x} = A^{-1}(b+\delta b)$, $\hat{x} - x^* = A^{-1}\delta b$

$Ax^* = b \Rightarrow \|b\| \le \|A\|\,\|x^*\|$

$$\frac{\hat{x}-x^*}{\|x^*\|} = \frac{A^{-1}\delta b}{\|x^*\|} = \frac{\|b\|}{\|x^*\|}\, A^{-1}\frac{\delta b}{\|b\|} \Rightarrow \epsilon_d = \frac{\|\hat{x}-x^*\|}{\|x^*\|} \le \|A\|\,\|A^{-1}\|\,\epsilon_b$$

$\mu(A)$ "NUMERO di CONDIZIONAM" di A (in norma ...)

TEO ($\delta A = 0$): $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$;

$\epsilon_d \le \mu(A)\,\epsilon_b$ e $\exists\, b, \delta b \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\epsilon_d = \mu(A)\,\epsilon_b$

Es (continua): • $\|A(\gamma)\|_\infty = \frac{1}{\gamma}$, $\|A^{-1}(\gamma)\|_\infty = \frac{1}{\gamma}$, $\mu_\infty(A) = \frac{1}{\gamma^2}$

$\Rightarrow \epsilon_d \le \frac{1}{\gamma^2}\epsilon_b$; $b = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix}$, $\delta b = \begin{bmatrix} \delta b_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sono ...

• $\boxed{\text{CASO } \delta b = 0}$ Posto $\hat{\epsilon}_d = \frac{\|\hat{x}-x^*\|}{\|\hat{x}\|}$, $\epsilon_A = \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$:

TEO ($\delta b = 0$): $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$;

$\hat{\epsilon}_d \le \mu(A)\,\epsilon_A$ e $\exists\, b, \delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ t.c. $\hat{\epsilon}_d = \mu(A)\,\epsilon_A$

Oss: SE $\mu(A) \gg 1$, $\exists\, b \in \mathbb{R}^n$, $\delta b \in \mathbb{R}^n$, $\delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ t.c.

ϵ_d oppure $\hat{\epsilon}_d \gg \epsilon_b, \epsilon_A$ (Pb. mal condiz)

ALTRIMENTI, $\forall b \in \mathbb{R}^n$, $\delta b \in \mathbb{R}^n$, $\delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

si ha ϵ_d e $\hat{\epsilon}_d \approx \epsilon_b, \epsilon_A$ (Pb. ben condiz)

Oss: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mu(A) \ge 1$ per ogni norma (indotta)

Es: $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$
- Calcolare $\|A\|_1$
- Calcolare $\|Ae_k\|_1$ per $k = 1, 2, 3$ e dedurne una stima per $\mu_1(A)$
- stimare $\|A\|_2$ e $\mu_2(A)$.

Oss: $\|A\|_1 = \max\{\|Ax\|_1,\ \|x\|_1 = 1\}$

$\|A^{-1}\|_1 = \left(\min\{\|Ax\|_1,\ \|x\|_1 = 1\}\right)^{-1}$

$\Rightarrow \mu_1(A) = \frac{\max\{\dots\}}{\min\{\dots\}}$

Es: $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tr sup; • $\|T\|_1 \ge \max_k |t_{kk}|$

• se T invert, $\|T^{-1}\|_1 \ge \max_k |t_{kk}^{-1}| = \left(\min_k |t_{kk}|\right)^{-1}$

Es: $\gamma \in (0,1)$, $A(\gamma) = \begin{bmatrix} \gamma & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

- determ fatt LR con EG (o EGP)
- discutere il condizionamento del fattore destro.

Oss: $\mu_\infty(A(\gamma)) = (1+\gamma)^2 < 4$ (Pb ben condizionato) MA $\mu_\infty(D(\gamma)) \ge \frac{1}{\gamma^2}$, quindi arb. grande (Pb mal condiz):
- $A(\gamma)x = b$ è equivalente a $D(\gamma)x = c(\gamma)$ nel senso che hanno la stessa soluzione
- le proprietà di condiz di $D(\gamma)x = c(\gamma)$ sono peggiori di quelle del sist originario!

Rimedio: usare EGPP (elim di Gauss con pivoting PARZIALE):

al passo k si utilizza come pivot un elem $a^{(k)}_{ik}$ t.c.

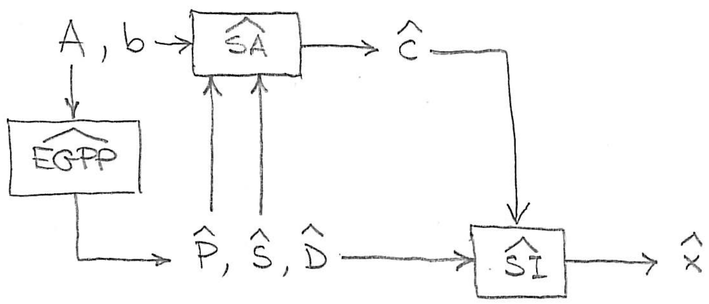
$$|a^{(k)}_{ik}| = \max\{\, |a^{(k)}_{jk}|,\ j = k, \dots, n \,\}$$

Es: $A(\gamma) = \begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $k = 1$, $A^{(1)} = A(\gamma)$,

- $\max\{\, |a^{(1)}_{j1}|,\ j = 1, 2 \,\} = |a^{(1)}_{21}|$;
- scambio riga 1 con riga 2 : $Z = P_{12} A^{(1)}$
- passo di elim : $H_1 = \lambda(z_1, 1)$, $A^{(2)} = H_1 Z = H_1 P_{12} A^{(1)}$
- $A^{(2)}$ è tr sup ; $A = (P_{12}^T H_1^{-1}) A^{(2)}$, ma $P_{12}^T H_1^{-1}$ non è tr inf con 1 sulla diagonale...
- ... $P_{12} (P_{12}^T H_1^{-1})$ è tr inf con 1 sulla diagonale

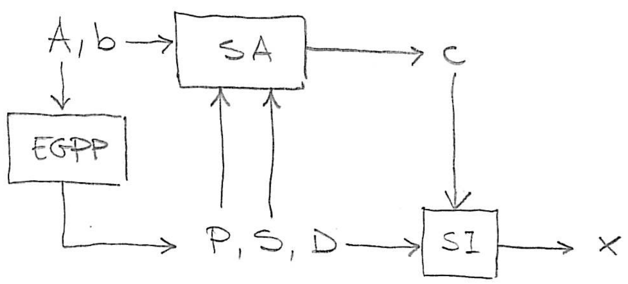
q.di : EGPP determina fatt LR di PA (come EGP...)

Oss : utilizz il calcolatore si realizzano procedure che mirano ad approx EGPP, SI, SA e si utilizz :



(op in M)

con l'intento di approx...



(op in $\mathbb{R}$)