Fattorizzazione QR

<u>def</u>: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; (U,T) è fatt QR di A se

- $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonale
- $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tr sup
- $A = UT$

<u>Es</u> (procedim di calcolo): $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

<u>PASSO 1</u>: determinare $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ a colonne <u>ortogonali</u> e Θ tr sup con $\theta_{kk} = 1$ t.c. $\Omega\Theta = A$

- $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \begin{bmatrix} 1 & \theta_{12} & \theta_{13} \\ 0 & 1 & \theta_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \omega_1\theta_{12} + \omega_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \omega_1\theta_{13} + \omega_2\theta_{23} + \omega_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$\omega_1 = \dots$

$\theta_{12} = \dfrac{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \omega_1}{\omega_1 \cdot \omega_1}$, $\omega_2 = \dots$

$\theta_{13} = \dfrac{\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \omega_1}{\omega_1 \cdot \omega_1}$, $\theta_{23} = \dfrac{\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \omega_2}{\omega_2 \cdot \omega_2}$, $\omega_3 = \dots$

<u>PASSO 2</u>: $W = \mathrm{diag}(\|\omega_1\|, \|\omega_2\|, \|\omega_3\|)$, $U = \Omega W^{-1}$, $T = W\Theta$

- U è ortogonale
- T è tr. sup
- $UT = (\Omega W^{-1})(W\Theta) = \Omega\Theta = A$

<u>TEO</u> ($\exists$ fatt QR): $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile; $\exists$ fatt QR di A (e il procedim descritto sopra ne trova una)

(<u>dim</u>: no)

<u>Es</u> (continua): A come Es precedente, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$;
Utilizz fatt QR trovato per risolvere l'eq $Ax = b$.

<u>Oss</u>:
- per calcolare fatt QR (op in $\mathbb{R}$) è <u>necess</u> $\sqrt{\cdot}$!
- (unicità): posto $\gamma_k \in \{1,-1\}$, $k = 1,2,3$, SE U,T è fatt QR di A, anche $U\,\mathrm{diag}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$, $\mathrm{diag}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\,T$ lo è.

<u>da fare</u>:
- condiz del Pb.
- studio in $F(\beta, m)$
- costo.

Preliminari: NORME in $\mathbb{R}^n$ e NORME di MATRICE

Fatti noti: $\mathbb{R}^n$ sp vett su $\mathbb{R}$ con ps canonico;
$N: v \to \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$ <u>norma euclidea</u> di v;

<u>def</u> (norma, sp normato): V sp vett su $\mathbb{R}$; $N: V \to \mathbb{R}$ <u>norma</u> in V SE

(I) $\forall v$, $N(v) \geq 0$ e $N(v) = 0 \Rightarrow v = 0$;

(II) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall v$, $N(\alpha v) = |\alpha|\, N(v)$ $(\Rightarrow N(0) = 0)$

(III) $\forall v, w$, $N(v+w) \leq N(v) + N(w)$ (disug triangolare)

(V,N) <u>spazio normato</u>

<u>Es</u>: $N_1: v \to |v_1| + \dots + |v_n| = \|v\|_1$ (<u>dim</u>...)
$N_\infty: v \to \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\} = \|v\|_\infty$

<u>Oss</u>: N_1, N_∞ <u>non</u> derivano da ps in $\mathbb{R}^n$ (<u>dim</u>: Oss. 0.35 p. 14)

<u>def</u> (intorno sferico): $I_N(v, \rho) = \{w \in \mathbb{R}^n : N(w - v) \leq \rho\}$
raggio
centro

<u>Es</u>: disegnare $I_N(0,1)$ in $\mathbb{R}^2$ per N_1, N_2, N_∞.

<u>def</u> (norma di matrice): si cons $(\mathbb{R}^n, N)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\sup\left\{\frac{N(Av)}{N(v)},\ v \neq 0\right\}$$
$\|A\|_N$
<u>norma di A</u> indotta da N

<u>Es</u>: $(\mathbb{R}^n, N)$, $\|I\|_N = 1$

<u>Oss</u>: $\sup\{\#\} < +\infty$ <u>Es</u>: $N_\infty(Av) \leq (\|a_1\|_\infty + \dots + \|a_n\|_\infty)\, N_\infty(v)$