Oss: $k \in \{1,\dots,n-1\}$, $v \in \mathbb{R}^n$ t.c. $v_k \neq 0$; posto

$$\ell = (\underbrace{0,\dots,0}_{k}, \frac{v_{k+1}}{v_k},\dots,\frac{v_n}{v_k})^T \in \mathbb{R}^n, \qquad H = I - \ell e_k^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

si ha:

- H è tr inf con $h_{jj}=1$, $j=1,\dots,n$
- $Hv = (v_1,\dots,v_k,0,\dots,0)^T$
- $\forall w\in\mathbb{R}^n$ con $w_k=0$, $Hw = w$

$\boxed{\text{notazione: } H = \lambda(v,k)}$

- $H^{-1} = I + \ell e_k^T$ (infatti...)

Es: $k=2$, $v = (1,2,4,6)^T$

- $v_2 = 2 \neq 0$
- $\ell = (0,0,2,3)^T$
- $\ell e_2^T = \begin{bmatrix}0\\0\\2\\3\end{bmatrix}(0,1,0,0) = \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&2&0&0\\0&3&0&0\end{bmatrix} = (0,\ell,0,0)$
- $H = I - \ell e_2^T = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-2&1&0\\0&-3&0&1\end{bmatrix}$, $Hv = \begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix}$, $H^{-1} = \dots$

$(S,D) = EG(A)$

dati: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$;

uscita: se termina, (S,D) fattorizz LR di A;

$A^{(1)} = A$;

per $k = 1,\dots,n-1$ **ripeti**

  se $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ **allora** ($a_{kk}^{(k)}$: k-esimo PIVOT)

  - $H_k = \lambda(a_k^{(k)}, k)$;
  - $A^{(k+1)} = H_k A^{(k)}$

  altrimenti STOP (k-esimo pivot nullo)

$D = A^{(n)}$; $S = H_1^{-1}\cdots H_{n-1}^{-1}$.

Es: $A = \begin{bmatrix}2&1&0\\4&0&1\\6&1&-1\end{bmatrix}$; $A^{(1)} = A$;

- $k=1$, $a_{11}^{(1)} = 2 \neq 0$: $H_1 = \lambda(a_1^{(1)},1) = \begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}$, $A^{(2)} = H_1 A^{(1)} = \begin{bmatrix}2&1&0\\0&-2&1\\0&-2&-1\end{bmatrix}$
- $k=2$, $a_{22}^{(2)} = -2 \neq 0$: $H_2 = \lambda(a_2^{(2)},2) = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$, $A^{(3)} = H_2 A^{(2)} = \begin{bmatrix}2&1&0\\0&-2&1\\0&0&-2\end{bmatrix}$

$$(S,D) = \left(\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2&1&0\\0&-2&1\\0&0&-2\end{bmatrix}\right) = EG(A)$$

$\boxed{\text{Oss: } d_{kk} = a_{kk}^{(k)},\ k=1,2,\dots,n}$

Oss:

- $A^{(n)}$ è tr sup (ad ogni passo si "azzera" una colonna...);
- H_k^{-1} è tr inf con 1 sulla diagonale $\Rightarrow$ $S = H_1^{-1}\cdots H_{n-1}^{-1}$ è tr inf con $s_{jj} = 1$ (verificare!)
- $A^{(n)} = H_{n-1}A^{(n-1)} = \dots = H_{n-1}\cdots H_1 A \Rightarrow A = (H_1^{-1}\cdots H_{n-1}^{-1})A^{(n)} = SD$.

Es (calcolo di S):

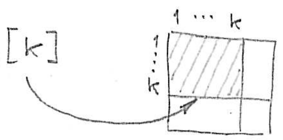
$H_1 = \begin{bmatrix}1&0&0\\\lambda_{21}&1&0\\\lambda_{31}&0&1\end{bmatrix}$, $H_2 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&\lambda_{32}&1\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $H_1^{-1}H_2^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\-\lambda_{21}&1&0\\-\lambda_{31}&-\lambda_{32}&1\end{bmatrix}$ (verificare!)

(**Oss**: è sempre vero!)

Pb: non sempre EG è definita (non sempre EG **termina**) **Es**: $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$

def (minori principali di testa):

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $k\in\{1,\dots,n\}$; $A[k]$



"minore principale di testa (di ordine k)"

TEO (insieme di def di EG):

EG è def in $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ (ovvero: $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ per $k=1,\dots,n-1$) $\Leftrightarrow$ $\det A[k] \neq 0$ per $k=1,\dots,n-1$

(**dim**: no)

Es: $\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$ no, $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ sì, $\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ no

Oss: (I) **se** S,D è fatt LR di A con $d_{kk}\neq 0$, $k=1,\dots,n-1$, **allora** $\exists!$ fatt LR di A (**dim**: con $n=3$, usare Doolittle)

Q. di: $\boxed{\text{SE EG è def in } A\text{, ALLORA } EG(A) \text{ è l'unica fatt}}$

(II) $\boxed{A \text{ invertibile. Se EG non è def in } A\text{, allora } \nexists \text{ fatt LR}}$

(**dim**: no)

	EG d	EG nd
i	$\exists !$	$\nexists$
ni	$\exists !$	$\nexists / \exists_\infty$

relaz tra ins def EG ed esistenza di fatt LR

(Es: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\nexists$ fatt , $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\exists_\infty$ fatt)

Es: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $A(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \alpha & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -\alpha \end{bmatrix}$

1) determ per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ EG è def in $A(\alpha)$;

2) discutere $\exists$ di fatt LR di $A(\alpha)$.

Sol: 1) EG è def $\forall \alpha \neq 1/2$

2) Per $\alpha \neq 1/2$ la fatt è unica, per $\alpha = 1/2$ $\nexists$ fatt.

Es: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; utilizz la fatt LR ricavata in precedenza per risolvere il sistema $Ax = b$.

(Sol: ...)