2 SISTEMI di EQUAZIONI LINEARI

Pb: dati $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile, $b \in \mathbb{R}^n$ determinare $x^* \in \mathbb{R}^n$ t.c. $Ax^* = b$.

Oss: A invertibile significa (propr equivalenti)

- $\det A \neq 0$
- $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$
- $\ker(A) = \{0\}$
- colonne (righe) di A sono elem lin indip (q. di BASE) di $\mathbb{R}^n$
- $\exists!\ B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.c. $AB = BA = I$ (notaz: $B = A^{-1}$)
- $\forall b \in \mathbb{R}^n$, $\exists!\ x^* \in \mathbb{R}^n$ t.c. $Ax^* = b$

---

casi semplici

(D) A diagonale ($a_{ij} = 0$ per $i \neq j$)

- invertibile $\Leftrightarrow$ $a_{kk} \neq 0$ per $k = 1, \dots, n$
- soluzione: $x_k = b_k / a_{kk}$, $k = 1, \dots, n$

(T) A triangolare ($a_{ij} = 0$ per $\begin{cases} i > j & \text{SUPERIORE} \\ i < j & \text{INFERIORE} \end{cases}$)

- invertibile $\Leftrightarrow$ $a_{kk} \neq 0$ per $k = 1, \dots, n$
- soluzione: TS) SOSTITUZ ALL'INDIETRO ...
  TI) SOSTITUZ IN AVANTI (Es: descrivere procedura!)

(O) A ortogonale (propr equivalenti: (I) colonne di A base o.n di $\mathbb{R}^n$ (risp po canonico!) (II) A invertibile e $A^{-1} = A^T$ (III) $A^T A = I$)

- invertibile sicuramente
- soluzione:

$$Ax^* = b \Leftrightarrow A^T A x^* = A^T b \Leftrightarrow \boxed{x^* = A^T b}$$

$x = SI(T, c)$

dati: $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tr sup, $c \in \mathbb{R}^n$

uscita: se T invert, $x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $Tx = c$

se $(t_{11} \neq 0, \dots, t_{nn} \neq 0)$ allora

- $x_n = c_n / t_{nn}$;
- per $k = n-1, \dots, 1$ ripeti
  - $s_k = c_k - (t_{k,k+1} x_{k+1} + \dots + t_{k,n} x_n)$;
  - $x_k = s_k / t_{kk}$;

altrimenti STOP (matrice non invertibile).

Oss: la procedura SI descrive una funzione, anch'essa di nome SI. Il dominio della funzione — ovvero l'ins delle coppie T, c per le quali la procedura definisce il vettore x — e'

$$\{(T, c) \text{ t.c. } T \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ tr. sup invert}, c \in \mathbb{R}^n\}$$

(P) A matrice di permutazione (le colonne di A sono una permutazione degli elem della base canonica di $\mathbb{R}^n$)

Oss: A di permutaz ...
- A e' ortogonale
- $v \in \mathbb{R}^n$, le comp di Av ...

- invertibile certamente
- soluzione: $x^* = A^T b$ (le comp si ottengono permutando ...)

Es: • $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; determ $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ di perm tale che $Pv = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

• $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; determ $P \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^4}$ e $(1, 2, 3, 4) P \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$.

Caso generale

idea: fattorizzare A con fattori semplici ...

Es: (I) fattorizz LR $\quad S, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.c.

- S tr inf con $s_{kk} = 1$ (invert!)
- D tr sup
- $A = SD$

Oss: A invert $\Leftrightarrow$ D invert!

(II) fattorizz QR $\quad U, T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.c.

- U ortogonale (invertibile!)
- T tr sup
- $A = UT$

Oss: A invert $\Leftrightarrow$ T invert!

... poi (uso della fattorizz $A = MN$):

$Ax = b$ è la stessa eq di $MNx = b$

0) cambio variabile: $Nx = c$ (N invert!)
1) risolvere $Mc = b$ (caso semplice) ... ricavo c
2) risolvere $Nx = c$ (" ") ... ricavo x

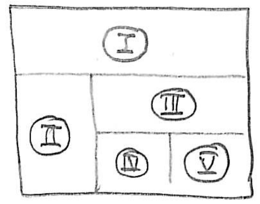
$\boxed{\text{Pb: determ fattorizz di } A.}$

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$; cerco fatt LR ...

ovvero: $s_{21}, \dots, d_{33}$ t.c. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_{21} & 1 & 0 \\ s_{31} & s_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ 0 & d_{22} & d_{23} \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$

Soluzione: considerare le 9 eq ottenute uguagliando gli elementi

nell'ordine di figura:



ovvero: 1ª riga, 1ª colonna; 2ª riga, 2ª colonna; ...

(METODO di DOOLITTLE).