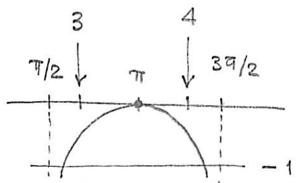
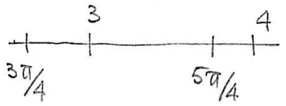
Es: Sia $f(x) = \text{sen}\, x$; per appross lo zero in $[3,4]$ (ovvero π) si utilizza il m. di Newt. Indicare $x_0 \in \mathbb{R}$ a partire dal quale la success generata è convergente (op in $\mathbb{R}$).

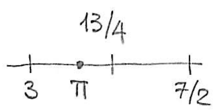
Sol:
- su $[3,4]$ si ha: $f \in C^2$, $\exists$ zero, $f' \neq 0$ $(f'(x) = \cos x \dots)$
  MA $f''(x)$ non è $\neq 0$ per ogni $x \in [3,4]$ — $f''(\pi) = 0$.
- NON possiamo utilizz l'Oss per la scelta del punto iniziale...

Alternativa...

- $h(x) = x - \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = x - \text{tg}\, x$; $h'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$



- $\forall x \in [3,4]$, $h'(x) \leq 0$;
- $h'(x) = -1$ per $1 - \frac{1}{\cos^2 x} = -1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}$
-  $\Rightarrow$ $[3,4]$ non verif ip (2) del Teo conv loc

- $\pi < \frac{7}{2} < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \left[3, \frac{7}{2}\right]$ verifica ip (1) e (2) del teo conv loc
-  , $\pi < \frac{13}{4} \Rightarrow$ punto iniziale "buono": $c = 3$

> **Oss:** dalla costruz grafica si osserva che la success non è monotona! (ed anche utilizz la dim del Teo conv loc...)

> **Es:** Per i metodi ad un punto, l'$\exists$ di $[a,b]$ che verif ip (1) e (2) del Teo di conv loc, dipende "solo" da $h'(\alpha)$. Da cosa dip l'$\exists$ di $[a,b]$ che verif ip (1) e (2) dell'Oss sulla scelta del punto iniz per il m. di Newt?

... da fare...

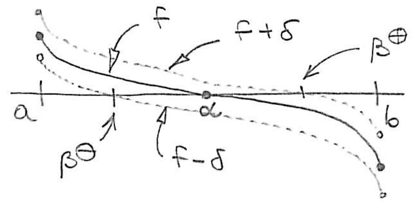
(I) condizionam del problema
(II) stabilità (operando in M...)
(III) criteri d'arresto.

- **CONDIZIONAMENTO:** **Oss:** $[a,b]$, $f \in C^1[a,b]$, $\delta > 0$ t.c. $\begin{cases} f' \neq 0 \text{ su } [a,b] \\ f(a) f(b) < 0 \\ |f(a)|, |f(b)| > \delta \end{cases}$

  e

  g continua su $[a,b]$ t.c. $\forall x \in [a,b]$, $|f(x) - g(x)| \leq \delta$

$\Rightarrow$
- $\exists \beta$ zero di g in $[a,b]$
- $f(\beta) - f(\alpha) = \begin{cases} f(\beta) \\ f'(\theta)(\beta - \alpha) \dots \end{cases}$ ... con $\theta \in [a,b]$



$\beta^{\ominus} \leq \beta \leq \beta^{\oplus}$

dunque $\beta - \alpha = \frac{f(\beta)}{f'(\theta)}$ e q. di (A) $|\beta - \alpha| \leq \frac{\delta}{\min |f'(x)|}$

(B) se δ piccolo: $|\beta - \alpha| \approx \frac{\delta}{|f'(\alpha)|}$

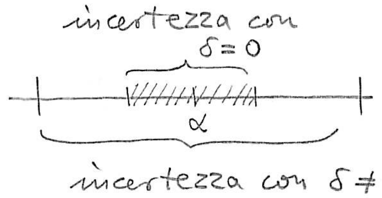
$|\beta - \alpha|$ "errore assoluto TRASM dai DATI"
δ "errore assoluto sui DATI"

> **Es:** $F(x) = x^2$, $\exists$ zero in $[-1,1]$; NON verif Oss: $\forall \delta > 0$, $F(x) + \delta$ non ha zeri in $[-1,1]$

- **STABILITÀ:** Siano
  * h, $[a,b]$ che verif ip teo conv loc con $L \in [0,1)$
  * $\varphi: M \to M$ t.c. $|\varphi(\xi) - h(\xi)| \leq \delta$ per $\forall \xi \in [a,b] \cap M$
  * $\xi_0, \xi_1 = \varphi(\xi_0), \dots \in [a,b] \cap M$

ALLORA: $|\xi_k - \alpha| \leq L^k |\xi_0 - \alpha| + \frac{1 - L^k}{1 - L} \delta$ (α p.u. di h in $[a,b]$)

ovvero:



(al passo k)

per $k \to \infty$:
$L^k |\xi_0 - \alpha| \to 0$
$\frac{1 - L^k}{1 - L} \delta \to \frac{\delta}{1 - L}$

- **CRITERI d'ARRESTO:**

(A) h, $[a,b]$ che verif ip teo conv loc; φ: $|h(\xi) - \varphi(\xi)| < \delta$; ξ_0 come sopra;

dato $E > 0$, SE $|\xi_k \ominus \xi_{k-1}| < E$ ALLORA stop

motivo: op in $\mathbb{R}$ si avrebbe...

- $|x_{k-1} - \alpha| \leq |x_{k-1} - x_k| + |x_k - \alpha| \leq |x_k - x_{k-1}| + L |x_{k-1} - \alpha|$

e q. di: $|x_{k-1} - \alpha| \leq \frac{|x_k - x_{k-1}|}{1 - L}$

inoltre: $x_k - x_{k-1} = h(x_{k-1}) - h(x_{k-2}) = h'(\theta)\,(x_{k-1} - x_{k-2})$

perciò... $\begin{cases} |x_k - x_{k-1}| \le L\,|x_{k-1} - x_{k-2}| \\ |x_k - x_{k-1}| \le L^{k-1}\,|x_1 - x_0| \end{cases}$ $\Rightarrow$ $|x_k - x_{k-1}|$ decrescente ... e $\lim_{k\to\infty} |x_k - x_{k-1}| = 0$.

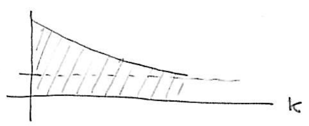
criterio EFFICACE!

- op in M si ha: $$\boxed{|\xi_{k-1} - \alpha| \le \frac{|\xi_k - \xi_{k-1}|}{1-L} + \frac{\delta}{1-L}}$$

e: $\xi_k - \xi_{k-1} = \varphi(\xi_{k-1}) - \varphi(\xi_{k-2}) = \varphi(\xi_{k-1}) - h(\xi_{k-1}) + h(\xi_{k-1}) - h(\xi_{k-2}) + h(\xi_{k-2}) - \varphi(\xi_{k-2})$

$\Rightarrow |\xi_k - \xi_{k-1}| \le 2\delta + L\,|\xi_{k-1} - \xi_{k-2}|$ "quasi decrescente"...

... e $|\xi_k - \xi_{k-1}| \le 2\delta\,\frac{1-L^{k-1}}{1-L} + L^{k-1}\,|\xi_1 - \xi_0|$

$\frac{2\delta}{1-L}$ 

Oss:
- criterio utilizz per ξ_k success gen da metodo def da φ...
- scegliere E troppo piccolo è inutile!
- situazione "pericolosa": $L \simeq 1$.

(B) ψ: $|\psi(\xi) - f(\xi)| \le \delta$; $f \in C^1[a,b]$, $f' \neq 0$ su $[a,b]$, $m = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)|$

dato $E > 0$, $\boxed{\text{SE } |\psi(\xi_k)| < E \text{ ALLORA stop}}$

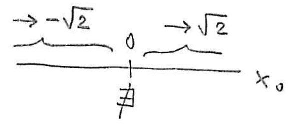
motivo: op in $\mathbb{R}$ si avrebbe... $$\boxed{|x_k - \alpha| = \frac{|f(x_k)|}{|f'(\theta)|} \le \frac{|f(x_k)|}{m}}$$

(e, se $x_k \to \alpha$, $f(x_k) \to 0$...)

- op in M si ha: $$\boxed{|\xi_k - \alpha| \le \frac{|\psi(\xi_k)| + \delta}{m}}$$

Oss:
- criterio utilizz per "ξ_k qualsiasi"...
- scegliere E troppo piccolo è inutile
- situazione "pericolosa": $m \simeq 0$.

Es: $f(x) = x^2 - 2$; $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, decidere cosa accade utilizz m. di NewT (op in $\mathbb{R}$) a partire da x_0.

(Sol: )

Es: $h(x) = \begin{cases} x/2 & \text{per } x \ge 0 \\ 2x & \text{per } x < 0 \end{cases}$; det pti uniti di h e $\forall x_0$ decidere cosa accade utilizz il m. it def da h (op in $\mathbb{R}$) a partire da x_0.