Oss: Sostituendo l' ip (2) del teo. di conv locale con l' ip

(2') $\exists L \in [0,1)$ t.c. $\forall x, y \in [a,b]$, $|h(x) - h(y)| \leq L\,|x-y|$

le tesi del teo continuano a sussistere. L' ip (2') si enuncia "h è una contrazione su $[a,b]$."

- (2) $\Rightarrow$ (2') — $\exists$ funz che verificano (2') ma non (2);
- se si richiede (2') anziché (2), h non deve necessariam essere derivabile su $[a,b]$;
- (2') $\Rightarrow$ h continua in $[a,b]$;

Oss (confronto bisez/metodi ad un punto con OdC = 1):

- Applicabilità (op in $\mathbb{R}$!): BISEZ ... f cont su $[a,b]$ con $f(a)f(b)<0$
  METODI ad UN PUNTO ... h verif ip teo conv locale
- rapidità di conv:

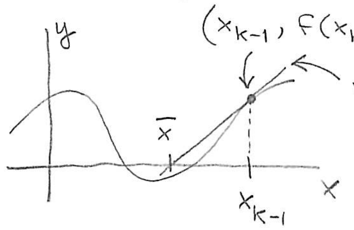
$$\left.\begin{array}{l} \text{BISEZ} \ldots \dfrac{\text{mis } I_k}{\text{mis } I_0} = \dfrac{1}{2^k} \\[2ex] \text{METODI ad UN PUNTO} \ldots \dfrac{|x_k - \alpha|}{|x_0 - \alpha|} \leq L^k \end{array}\right\} \ldots \text{dipende da } L \text{ (ovvero da proprietà di } h\text{)}$$

- **Metodo di Newton**

$f \in C^2$, $f'(x) \neq 0$: è il metodo ad un punto def da $\boxed{h(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}}$

PROPRIETÀ:
- $x = h(x)$ equiv $f(x) = 0$;
- SE α zero di f, $\exists [a,b]$ che verifica ip teo conv locale;
- SE α zero di f, $h'(\alpha) = 0 \Rightarrow$ OdC ad α almeno 2

Oss (interpr geometrica del metodo):



retta tang al grafico di f in x_{k-1}:
$$y = f'(x_{k-1})(x - x_{k-1}) + f(x_{k-1})$$
$\bar{x}$ t.c. $f'(x_{k-1})(\bar{x} - x_{k-1}) + f(x_{k-1}) = 0$

OVVERO: $\bar{x} = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} = h(x_{k-1})$ | METODO delle TANGENTI

> **Oss** (scelta del punto iniziale): $[a,b]$, $f \in C^2[a,b]$, $c \in [a,b]$ t.c.
> (1) $\exists \alpha$ zero di f in $[a,b]$
> (2) $\forall x \in [a,b]$, $f'(x) \neq 0$ ($\Rightarrow \alpha$ è l'UNICO zero di f in $[a,b]$), $f''(x) \neq 0$
> (3) $f(c)\, f''(c) > 0$
>
> ALLORA: la success gen dal m. di Newt. a partire da c è convergente ad α, ed è monotona.
>
> (dim: ragionam geometrico...)

Es: $f(x) = x^2 - 2$;

- # zeri = 2 : $\alpha_1 \in [-2,-1]$, $\alpha_2 \in [1,2]$
- Posso utilizz m. di Newt per approx α_2?

  $f \in C^2[1,2]$, $f'(x) = 2x \neq 0$ su $[1,2] \Rightarrow \exists [a,b]$ che verif ip (1), (2) del teo conv loc...
- Come trovo c che generi succes conv?

  1) Cerco $[a,b]$ che verif ip (1) e (2) del teo conv loc (so che esiste!) e poi scelgo l'estremo...

  OPPURE

  2) cerco di utilizz l' Oss precedente:
     - $\alpha_2 \in [1,2]$ zero di $f \in C^2[1,2]$
     - $\forall x \in [1,2]$, $f'(x) = 2x \neq 0$, $f''(x) = 2 \neq 0$
     - $f(2)\, f''(2) = 2 \cdot 2 > 0$

  $\Rightarrow$ la success gen dal m. di Newt a partire da $c = 2$ converge ad α_2, ed è monotona decrescente.