CN / 19, 20   27 marzo 2009 (CØ1)

• Metodi ad un punto: ...

* descrizione del metodo (op. in $\mathbb{R}$)

> **dati**: $h:[a,b]\to\mathbb{R}$, continua, $c\in[a,b]$;
>
> $x_0=c$;
>
> **per** $k=1,2,\dots$ **ripeti**: **se** $x_{k-1}\notin[a,b]$ **allora** STOP
>
> **altrimenti** $x_k=h(x_{k-1})$
>
> **uscita**: quando un opportuno criterio d'arresto è verificato, x_k.

Oss: **se** $x_0,x_1,x_2,\dots$ è una success in $[a,b]$ convergente ad α, **allora** la succes $h(x_0),h(x_1),h(x_2),\dots$ è convergente a $h(\alpha)$ (**dim**: h è continua!)

se, inoltre: $x_1=h(x_0)$, $x_2=h(x_1)$, ... **allora**: $\alpha=h(\alpha)$

OVVERO:

> **se** $x_0, x_1=h(x_0), x_2=h(x_1),\dots$ è una succes in $[a,b]$ **convergente**, il limite della successione è punto unito di h.

Pb: decidere se $\exists$ (ed eventualm determinare) $c\in[a,b]$ in modo che $x_0=c$, $x_1=h(x_0)$, $x_2=h(x_1)$, ... sia una successione in $[a,b]$ **convergente**.

Sol: utilizz il ...

> **TEO** (di convergenza locale): Siano $[a,b]$, $h\in C^1[a,b]$ e $c\in[a,b]$ t.c.:
>
> 1) $\exists\,\alpha\in[a,b]$ punto unito di h;
> 2) $\exists\, L\in[0,1)$ t.c. $\forall x\in[a,b]$, $|h'(x)|\le L$;
> 3) $x_0=c$, $x_1=h(x_0)$, $x_2=h(x_1)$, ... sia una successione in $[a,b]$.
>
> **Allora**: (i) α è l'unico punto unito di h in $[a,b]$;
>
> (ii) la successione $x_0,x_1,x_2,\dots$ è convergente (ad α).

dim: (i) PER ASSURDO... α,β punti uniti **distinti** di h in $[a,b]$

$\Rightarrow \alpha-\beta = h(\alpha)-h(\beta) \overset{\text{TEO. LAGRANGE}}{=} h'(\theta)(\alpha-\beta)$, θ tra α e β ($\Rightarrow \theta\in[a,b]$)

$\Rightarrow h'(\theta)=1$, **assurdo** (vedere ip. (2)).

> **Oss**: Ip. (3) non serve per (i)!

(ii) $x_k-\alpha = h(x_{k-1})-h(\alpha) \overset{\text{T.L.}}{=} h'(\theta_{k-1})(x_{k-1}-\alpha)$, $\theta_{k-1}\in[a,b]$ (per ip. (3))

⊛ $\Rightarrow |x_k-\alpha| = |h'(\theta_{k-1})|\,|x_{k-1}-\alpha| \le L\,|x_{k-1}-\alpha|$

... iterando ... $\le L^k|x_0-\alpha|$

$\Rightarrow |x_0-\alpha|, |x_1-\alpha|, |x_2-\alpha|, \dots$ è **monotona** e **conv a 0**

(ovvero: $\lim_{k\to\infty} x_k=\alpha$)

⊛ $\Rightarrow$ se $h'(x)\neq 0$ $\forall x\in[a,b]$:

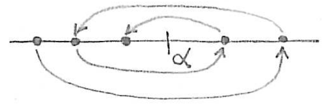
(+) $x_k-\alpha$, $x_{k-1}-\alpha$ concordi se $h'(x)>0$

ovvero: x_k, x_{k-1} "dalla stessa parte risp ad α"

$\Rightarrow$ la succes $x_0,x_1,x_2,\dots$ è **monotona**;

(−) $x_k-\alpha$, $x_{k-1}-\alpha$ discordi se $h'(x)<0$

ovvero: x_k, x_{k-1} "da parti opposte rispetto ad α"

$\Rightarrow$ 

Es: $h(x)=\frac{\cos x}{2}\in C^1(\mathbb{R})$; • $\exists$ p.u di h in $[0,\pi/2]$ (graficamente...)

• $\forall x\in[0,\pi/2]$, $|h'(x)|\le 1/2 = L$

• $x\in[0,\pi/2]\Rightarrow h(x)\in[0,\pi/2]$, q.di $\forall c\in[0,\pi/2]$ la succes...

• Costruzione grafica della succes.