CN / $\boxed{16}$, $\boxed{18}$ 24 marzo 2009 (B33)

$\boxed{1}$ ZERI di FUNZIONI di VARIABILE REALE

Pb: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, continua, determinare $\alpha \in [a,b]$ t.c. $f(\alpha)=0$

Vedremo:
- METODO di BISEZIONE;
- METODI ad UN PUNTO;
  - * caso particolare: METODO di NEWTON.

Schema della presentazione:

Pb, descrizione e discussione di un metodo di soluzione OPERANDO in $\mathbb{R}$,
discussione del metodo OPERANDO in M.

- Metodo di bisezione.

idea: utilizz il TEO di ESISTENZA degli ZERI per costruire una successione di intervalli I_k, ciascuno contenente uno zero e t.c. $I_{k+1} \subset I_k$, $\lim_{k\to\infty} mis(I_k)=0$.

$\boxed{\text{SE } f:[a,b]\to\mathbb{R} \text{ continua e } f(a)f(b)<0 \text{ ALLORA } \exists \text{ zero di } f \text{ in } (a,b)}$

* descrizione del metodo (operando in $\mathbb{R}$)

dati: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, continua e $f(a)f(b)<0$;
$a_0=a$, $b_0=b$, $I_0=[a_0,b_0]$, $x_0=\frac{a_0+b_0}{2}$;

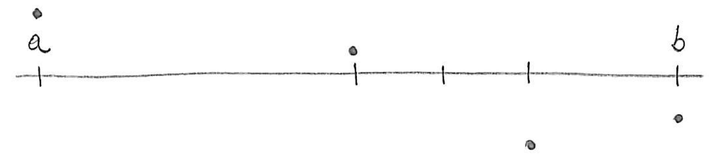
per $k=1,2,\dots$ ripeti

se $f(x_{k-1})=0$ allora STOP

altrimenti
- se $f(x_{k-1})f(b_{k-1})<0$ allora $a_k=x_{k-1}$, $b_k=b_{k-1}$;
- se $f(a_{k-1})f(x_{k-1})<0$ allora $a_k=a_{k-1}$, $b_k=x_{k-1}$;
- $I_k=[a_k,b_k]$, $x_k=\frac{a_k+b_k}{2}$;

uscita: quando un opportuno criterio d'arresto è verificato, x_k, I_k.

Es:



$k=0$	a_0	x_0		b_0	I_0
$k=1$		a_1	x_1	b_1	I_1
$k=2$		a_2 x_2	b_2		I_2

Oss:
- I_k è il semintervallo (destro o sinistro) di I_{k-1} ...
- $mis(I_k) = \frac{mis(I_{k-1})}{2^1} = \frac{mis(I_{k-2})}{2^2} = \dots = \frac{mis(I_0)}{2^k}$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} mis(I_k)=0$.

Oss (criterio d'arresto, ASSOLUTO): dato $\delta>0$, decidiamo di arrestare l'iterazione ... $\boxed{\text{se } mis(I_k)<\delta \text{ allora STOP}}$

- $\forall k$, $mis(I_k)$ è calcolabile $(=|b_k-a_k|)$ e, per quanto detto sopra, la disuguaglianza è CERTAMENTE verificata dopo un numero FINITO di iterazioni!
- Quando il criterio d'arresto è verificato (ad es. $k=N$) si ha:
  - * $\exists \alpha \in I_N$ t.c. $f(\alpha)=0$
  - * $|x_N-\alpha| < \frac{mis(I_N)}{2} < \delta/2$

  q.di si è ottenuta un'approssimazione di α con ERRORE ASSOLUTO $<\delta/2$.

Es: dato $\delta = 2^{-m} g$ (esponente $-m<0$, $\frac{1}{2}\le g<1$), determinare k t.c. $mis(I_k)<\delta$ (ovvero: il numero di iterazioni minimo che rende verificato il criterio di arresto).
(Sol: $k > \log_2 mis(I_0) - \log_2 g + m$)

Es: $M=F(10,16)$, determ un intervallo I, con estremi in M t.c $I \ni \sqrt{2}$ e $mis(I)<10^{-15}$.

Sol: $\sqrt{2} = 10^1\, 0{,}1\dots \Rightarrow$ distanza tra elem consecutivi di $M = 10^{-15}$
$\Rightarrow \nexists$ intervallo con le proprietà richieste.

Oss: Se utilizziamo un calc che opera in $F(10,16)$ per appross lo zero positivo di $f(x) = x^2 - 2$ con il metodo di bisezione, con criterio d'arresto assoluto $mis(I_k) < \delta$, usare $\delta \leq 10^{-15}$ fa sì che l'esecuzione della procedura non si arresti mai.

Oss (criterio d'arresto, RELATIVO): se I_k contiene uno zero (α) di f e non contiene 0, posto $m_k = \min\{|a_k|, |b_k|\}$ si ha

$$\left|\frac{x_k - \alpha}{\alpha}\right| \leq \frac{mis(I_k)}{2m_k}$$

Perciò, dato $\varepsilon > 0$, decidiamo di arrestare l'iterazione...

$$\boxed{\text{se } \frac{mis(I_k)}{m_k} < \varepsilon \text{ allora STOP}}$$

ottenendo così un'appross (x_k) di α con ERRORE RELATIVO $< \varepsilon/2$.

Oss:
- Se $0 \notin I_0$: $\forall k$, $\frac{mis(I_k)}{m_k}$ è calcolabile (perché $m_k \neq 0$), ed il criterio è certam verif dopo un numero finito di it ($\lim_{k\to\infty} \frac{mis(I_k)}{m_k} \ldots$)
- anche utilizz il cr d'arresto relativo, operando in M occorre utilizz ε non troppo piccolo!

Oss: la successione I_k è determinata dal segno di $f(x_k)$; se si opera in M, si approssima $f(x_k)$ con $\varphi(x_k)$...

Pb: la "rapidità" del metodo di bisezione dipende solo da:
- ampiezza I_0 e ordine di grandezza δ (cr arr ASSOL)
- " " , ordine di grandezza ε ed α (cr arr REL)

in part: è indipendente da proprietà particolari di f.

- Metodi ad un punto

idea: data f di cui interessa uno zero, determ h t.c.

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = h(x)\}.$$

ovvero: α zero di f $\Leftrightarrow$ α punto unito di h

Es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $g(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

$h(x) = x - f(x)\,g(x) \Rightarrow f(x) = 0$ equivalente a $x = h(x)$.

Es: $f(x) = x + \log x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$; $h_1(x) = -\log x$

$h_2(x) = e^{-x}$, $h_3(x) = \frac{x + e^{-x}}{2}$.