Es (f di condizionam per le op aritmetiche):

1) $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

- $\delta_d = \delta_1 + \delta_2$ (indip dal dato!)
- $\varepsilon_d = \frac{x_1}{x_1+x_2}\varepsilon_1 + \frac{x_2}{x_1+x_2}\varepsilon_2$

> Oss: • Se $x_1 x_2 > 0$ allora $\left|\frac{x_1}{x_1+x_2}\right| < 1$ e $\left|\frac{x_2}{x_1+x_2}\right| < 1$
> e quindi: $|\varepsilon_d| < |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|$ ("caso buono")
> • Se, ad es, $x_1 = 10^6$, $x_2 = 1 - 10^6$: $\varepsilon_d = 10^6 \varepsilon_1 + (1-10^6)\varepsilon_2$
> e PUÒ ACCADERE che $|\varepsilon_d| >> |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|$ ("caso cattivo")

2) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$

- $\delta_d = \ldots = x_1\delta_2 + x_2\delta_1 + \delta_1\delta_2$
- $\varepsilon_d = \ldots = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$ (indip dal dato!)

3) $f(x_1, x_2) = x_1/x_2$

- $\delta_d = \frac{x_2\delta_1 - x_1\delta_2}{x_2(x_2+\delta_2)}$
- $\varepsilon_d = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{1+\varepsilon_2}$ (indip dal dato!)

Es. Altezza di una RISMA di fogli A4 : $h \in [4{,}9 ; 5{,}1]$ cm

h 

1 RISMA = 500 fogli

spessore di 1 foglio: $s = h/500$

- Se $h = h_0 + \delta$ con $h_0 = 5$ cm e $|\delta| \le 0{,}1$ cm
  allora: $s = h_0/500 + \delta/500 = s_0 + \delta'$ con: $s_0 = \frac{1}{100}$ cm $= 100\,\mu m$
  $|\delta'| \le \frac{0{,}1}{500}$ cm $= 2\,\mu m$
  utilizz (3) : $\delta_d \overset{\delta_2=0}{=} \frac{\overbrace{\delta_1}^{=\delta}}{x_2}$ e $|\delta_d| \le \frac{0{,}1}{500}$ cm
- se $h = h_0(1+\varepsilon)$ con $h_0 = 5$ cm e $|\varepsilon| \le \frac{1}{50}$
  allora: $s = \frac{h_0}{500}(1+\varepsilon) = s_0(1+\varepsilon)$ con: $s_0 = 100\,\mu m$
  $|\varepsilon| \le \frac{1}{50}$
  utilizz (3) : $\varepsilon_d \overset{\varepsilon_2=0}{=} \overbrace{\varepsilon_1}^{=\varepsilon}$ e ...

> Oss: * l'errore relativo non cambia!
> * $\varepsilon_d = \frac{s_0 - s}{s_0}$ (attenzione...!)

Oss (condizionam per funzioni C^1):

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$; $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}$; $\delta = \tilde{x} - x$; $\varepsilon = \frac{\tilde{x} - x}{x}$

- $\delta_d = f(\tilde{x}) - f(x) = f(x+\delta) - f(x)$
$= f'(\tau)\,\delta$ $\underbrace{\text{con } \tau \text{ tra } x \text{ ed } x+\delta}_{\tau = T(x,\delta)}$ (Teo ...)

$$\Rightarrow \delta_d = \underbrace{f'(T(x,\delta))}_{\text{f. di condizionamento}}\,\delta$$

* SE $|f'(x)| \leq L$ per tutti gli $x \in \mathbb{R}$
ALLORA: $|\delta_d| \leq L\,\delta$

* $\lim_{\delta \to 0} \frac{\delta d}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} f'(T(x,\delta)) = f'(x)$

- $\varepsilon_d = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} = \frac{f(x+\varepsilon x) - f(x)}{f(x)} = \frac{f'(\tau)\,\varepsilon x}{f(x)}$

$$\Rightarrow \varepsilon_d = \underbrace{\frac{f'(T(x,\varepsilon))}{f(x)} x}_{\text{f. di condiz.}}\,\varepsilon \qquad \underbrace{\text{con } \tau \text{ tra } x \text{ ed } x+\varepsilon x}_{\tau = T(x,\varepsilon)}$$

* SE $\left|\frac{f'(x)}{f(x)} x\right| \leq L$ per tutti gli $x \in \mathbb{R}$
ALLORA: $|\varepsilon_d| \leq L\,\varepsilon$

* $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f'(T(x,\varepsilon))}{f(x)} x = \frac{f'(x)}{f(x)} x$

Es: $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = e^x$, $\frac{f'(x)}{f(x)} x = x$
casi "cattivi": err. assol $x \gg 0$, err. rel $|x| \gg 0$.

(II) Studio dell'errore algoritmico (STABILITA')

Oss (caso "elementare"): $f: A \to \mathbb{R}$, $\varphi: A \cap M^n \to M$ t.c. $\varphi(\xi) = rd(f(\xi))$

ALLORA: $|\delta_a| = |\varphi(\xi) - f(\xi)| = |rd(f(\xi)) - f(\xi)| \leq \frac{1}{2}\beta^{b-m}$
$|\varepsilon_a| = \dots \leq u$

Es (pseudo-op aritmetiche): per $* \in \{+, -, \times, /\}$ si ha
$f(x_1, x_2) = x_1 * x_2$, $\varphi(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \circledast \xi_2 = rd(f(\xi_1, \xi_2)) \dots$

Es (caso non elementare): $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2) x_3$; $\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1 \overset{1}{\oplus} \xi_2) \overset{2}{\otimes} \xi_3$

siccome
- $\xi_1 \overset{1}{\oplus} \xi_2 = rd(\xi_1 + \xi_2) = (\xi_1 + \xi_2)(1 + \varepsilon_{a1})$, $|\varepsilon_{a1}| \leq u$
- $\xi_1 \overset{2}{\otimes} \xi_2 = \ldots = \xi_1 \xi_2 (1 + \varepsilon_{a2})$, $|\varepsilon_{a2}| \leq u$

allora: $\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1 + \xi_2)(1 + \varepsilon_{a1}) \xi_3 (1 + \varepsilon_{a2}) = F(\xi_1, \xi_2, \xi_3 ; \varepsilon_{a1}, \varepsilon_{a2})$

dunque si ha
- $\delta_a = \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) =$
  $= F(\xi_1, \xi_2, \xi_3 ; \varepsilon_{a1}, \varepsilon_{a2}) - f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \boxed{\Delta(\xi_1, \xi_2, \xi_3 ; \varepsilon_{a1}, \varepsilon_{a2})}$
- $\varepsilon_a = \ldots = \boxed{E(\xi_1, \xi_2, \xi_3 ; \varepsilon_{a1}, \varepsilon_{a2})}$

FUNZIONE di STABILITA' (quando si utilizza φ per appross f)

Es: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$; $M = F(10, 3)$, f. predef $\supset \oplus$

$\varphi_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1 \oplus \xi_2) \oplus \xi_3$, $\varphi_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1 \oplus (\xi_2 \oplus \xi_3)$

$\xi_1 = 10^{-2}\, 0{,}371$; $\xi_2 = 10^0\, 0{,}865$; $\xi_3 = -10^0\, 0{,}869$ | $\varphi_1(\ldots) = 0$; $\varphi_2(\ldots) = -10^{-3}\, 0{,}290$

- siccome $\varphi_1(\ldots) = 0$, stimiamo l'ERR. ASSOLUTO:

① $\delta_a = \varphi_1(\xi) - f(\xi) = \ldots = \delta_{a1} + \delta_{a2}$ $\begin{cases} |\delta_{a1}| \leq \frac{1}{2} 10^{0-3} = 0{,}5 \cdot 10^{-3} \\ |\delta_{a2}| = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow |\delta_a| \leq 0{,}5 \cdot 10^{-3}$

② $\delta_a = \varphi_2(\xi) - f(\xi) = \delta_{a1} + \delta_{a2}$ $\begin{cases} |\delta_{a1}| \leq \frac{1}{2} 10^{-2-3} = 0{,}5 \cdot 10^{-5} \\ |\delta_{a2}| \leq \frac{1}{2} 10^{-3-3} = 0{,}5 \cdot 10^{-6} \end{cases}$

$\Rightarrow |\delta_a| \leq 0{,}55 \cdot 10^{-5}$

Q. di φ_2 è <u>più affidabile</u> di φ_1 per appross. $f(\xi)$