Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Compito del 13 novembre 2025

Problema 1

Siano $M = F(2,2)$ e $A = (\frac{1}{7}, 1]$. Determinare il minimo dell'insieme $A \cap M$.

Problema 2

Sia $f(x) = xe^x - 1$.

(1) Dimostrare che la funzione ha un solo zero, α, e separarlo.

(2) Decidere se il metodo di Newton applicato ad f sia utilizzabile per approssimare α e, in caso affermativo, determinare x_0 in modo che la successione generata dal metodo di Newton a partire da x_0 sia convergente.

Problema 3

Siano:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione QR di A ed utilizzarla per calcolare la soluzione del sistema $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati.

Risultati e calendario orali → `https://pagine.dm.unipi.it/~a008363/x-didattica.php`

Soluzione

Problema 1

Il minimo di $A \cap M$ è il più grande tra i due elementi di M adiacenti ad $\frac{1}{7}$. Si ha:

$$\tfrac{1}{8} \leqslant \tfrac{1}{7} < \tfrac{1}{4}$$

quindi l'esponente di $\frac{1}{7}$ in base due è -2 e:

$$\tfrac{1}{7} = 2^{-2} \cdot g$$

La frazione è allora $g = \frac{4}{7}$. Posto $g = \frac{4}{7} = 0.c_1c_2c_3\cdots$ (scrittura posizionale di g in base due) si ha:

$$\tfrac{8}{7} = 1 + \tfrac{1}{7} = c_1.c_2c_3\cdots = c_1 + 0.c_2c_3\cdots$$

da cui $c_1 = 1$ e $\frac{1}{7} = 0.c_2c_3\cdots$. Poi:

$$\tfrac{2}{7} = c_2.c_3c_4\cdots = c_2 + 0.c_3c_4\cdots$$

da cui $c_2 = 0$ e $\frac{2}{7} = 0.c_3c_4\cdots$. Ricapitolando:

$$\tfrac{1}{7} = 2^{-2} \cdot 0.10\cdots$$

e gli elementi di M adiacenti a $\frac{1}{7}$ sono:

$$\xi_- = 2^{-2} \cdot 0.10 \qquad , \qquad \xi_+ = 2^{-2} \cdot 0.11$$

Il minimo di $A \cap M$ è allora: $\xi_+ = 2^{-2} \cdot 0.11 = \frac{3}{16}$.

Problema 2

(1) L'equazione $f(x) = 0$ è equivalente all'equazione:

$$xe^x = 1$$

Per ogni $x < 0$ si ha: $xe^x < 0$, dunque $f(x)$ non ha zeri negativi. Si ha poi:

$$f'(x) = e^x(1 + x)$$

e per $x > -1$ si ha $f'(x) > 0$. Dunque, sull'intervallo $[0, +\infty)$, $f(x)$ è crescente. Si ha inoltre:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Se ne deduce che $f(x)$ ha al più uno zero. Infine, $f(x)$ è una funzione continua per ogni $x \in \mathbb{R}$ e:

$$f(0) = -1 < 0 \qquad \text{e} \qquad f(1) = e - 1 > 0$$

Per il Teorema di esistenza degli zeri, $f(x)$ ha un solo zero $\alpha \in [0, 1]$.

(2) Per ogni $x \in [0, 1]$ si ha $f'(x) > 0$, quindi il metodo di Newton applicato ad f è utilizzabile per approssimare α. Inoltre:

$$f''(x) = e^x(2 + x)$$

e per ogni $x \in [0, 1]$ risulta $f''(x) > 0$. Per il criterio di scelta del punto iniziale per il metodo di Newton, si ha sicuramente convergenza a partire da $x_0 = 1$.

Problema 3

La procedura GS fornisce:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad , \qquad T = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

La soluzione si $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati è la soluzione del sistema $Tx = U^{\mathsf{T}}b$ (infatti: la soluzione si $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati è la soluzione del sistema delle equazioni normali $A^{\mathsf{T}}Ax = A^{\mathsf{T}}b$; sostituendo la fattorizzazione trovata di A l'ultimo sistema si riscrive: $T^{\mathsf{T}}U^{\mathsf{T}}UTx = T^{\mathsf{T}}U^{\mathsf{T}}b$ che, essendo $U^{\mathsf{T}}U = I$, si riduce a: $T^{\mathsf{T}}Tx = T^{\mathsf{T}}U^{\mathsf{T}}b$; poiché T^{T} è invertibile, l'ultimo sistema è infine equivalente a: $Tx = U^{\mathsf{T}}b$) che risulta:

$$x^* = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$