Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Compito del 10 settembre 2025

Problema 1

Sia $M = F_d(2, 3, -99, 99)$ con RTTE. Detto ξ_M l'elemento massimo di M, determinare

$$\theta = 1 \oslash \xi_M$$

Problema 2

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinare EGPP(A).

Problema 3

Assegnati i dati

$$(-1, 0) \quad , \quad (0, 0) \quad , \quad (1, 2) \quad , \quad (2, 0)$$

determinare il polinomio interpolante $p(x)$ in forma di Newton.

Soluzione

Problema 1

L'elemento massimo di M è:

$$\xi_M = 2^{99} \cdot 0.111 = 2^{99} \cdot \tfrac{7}{8}$$

Allora:

$$\theta = 1 \oslash \xi_M = \mathrm{rd}(1/\xi_M) = \mathrm{rd}(2^{-99} \cdot \tfrac{8}{7})$$

Si ha inoltre:

$$2^0 \leqslant \tfrac{8}{7} < 2^1$$

da cui:

$$\tfrac{8}{7} = 2^1 \cdot 0.c_1c_2c_3\cdots$$

ovvero:

$$0.c_1c_2c_3\cdots = \tfrac{4}{7}$$

Si ricava, moltiplicando ogni volta per la base (in questo caso per due):

$$c_1.c_2c_3\cdots = c_1 + 0.c_2c_3\cdots = \tfrac{8}{7} = 1 + \tfrac{1}{7} \Rightarrow c_1 = 1 \quad \text{e} \quad 0.c_2c_3\cdots = \tfrac{1}{7}$$

poi:

$$c_2.c_3c_4\cdots = c_2 + 0.c_3c_4\cdots = \tfrac{2}{7} = 0 + \tfrac{2}{7} \Rightarrow c_2 = 0 \quad \text{e} \quad 0.c_3c_4\cdots = \tfrac{2}{7}$$

e:

$$c_3.c_4c_5\cdots = c_3 + 0.c_4c_5\cdots = \tfrac{4}{7} = 0 + \tfrac{4}{7} \Rightarrow c_3 = 0 \quad \text{e} \quad 0.c_4c_5\cdots = \tfrac{4}{7}$$

Si è ottenuta una seconda espressione per $\frac{4}{7}$ da cui si deduce che la scrittura posizionale di $\frac{4}{7}$ è periodica e vale:

$$\tfrac{4}{7} = 0.\overline{100}$$

Perciò:

$$\tfrac{8}{7} = 2^1 \cdot 0.\overline{100}$$

e:

$$1/\xi_M = 2^{-99}\, 2^1 \cdot 0.\overline{100} = 2^{-98} \cdot 0.\overline{100}$$

L'ultimo passo è determinare l'arrotondato in M dell'elemento appena calcolato. Gli elementi adiacenti a $1/\xi_M$ sono:

$$\xi_- = 2^{-98} \cdot 0.100 \qquad \text{e} \qquad \xi_+ = 2^{-98} \cdot 0.101$$

e per il punto medio tra i due risulta:

$$\text{punto medio} = 2^{-98} \cdot 0.1001 < 1/\xi_M$$

Se ne deduce, infine:

$$\theta = \xi_+ = 2^{-98} \cdot 0.101$$

Problema 2

Dalla procedura EGPP applicata alla matrice assegnata A si ottiene:

$$P = P_{13} \quad , \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 2/3 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Problema 3

Utilizzando i dati nell'ordine in cui sono assegnati, la base di Newton risulta:

$$1 \quad , \quad x+1 \quad , \quad (x+1)x \quad , \quad (x+1)x(x-1)$$

Il sistema da risolvere per determinare la combinazione lineare che individua il polinomio interpolante è:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Risolvendo si ottiene:

$$c_1 = c_2 = 0 \quad , \quad c_3 = 1 \quad , \quad c_4 = -1$$

Infine, il polinomio interpolante è:

$$p(x) = (x+1)x - (x+1)x(x-1)$$