Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Compito del 25 giugno 2025

Problema 1

Sia $M = F_d(2, 4, -99, \alpha)$, con α numero intero positivo. Determinare

$$\theta = \min\{\, \xi \in M, \xi > 0 \,\}$$

e poi il minimo valore di α tale che $1/\theta \in M$.

Problema 2

Siano $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tali che:

(a) $A = BCD$;

(b) B è triangolare superiore;

(c) C è ortogonale;

(d) D è triangolare inferiore.

Descrivere un procedimento che decide se A sia invertibile e, in caso affermativo, determina la soluzione del sistema $Ax = b$ con $b \in \mathbb{R}^n$ assegnato.

Problema 3

Si consideri l'insieme

$$F = \{\, f(x) = ax + b\, cos x + c \ ,\ a, b, c \in \mathbb{R}\,\}$$

Determinare le $f(x) \in F$ che verificano le condizioni

$$f(0) = \alpha_1 \quad , \quad f'(\pi) = \alpha_2 \quad , \quad f''(\pi) = \alpha_3$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ numeri reali assegnati.

Soluzione

Problema 1

Il minimo elemento positivo di M si ottiene assegnando all'esponente il valore minimo, -99, ed alla frazione il valore minimo tenuto conto che l'insieme contiene gli elementi denormalizzati: 0.0001. Dunque:

$$\theta = 2^{-99} \cdot 0.0001 = 2^{-103}$$

Inoltre:

$$1/\theta = 2^{103} = 2^{104} \cdot 0.1$$

dunque il minimo valore di α per cui $1/\theta \in M$ è 104.

Problema 2

La matrice A è invertibile se e solo se lo sono i tre fattori B, C e D. Il fattore centrale C è ortogonale e, come tale, certamente invertibile. Gli altri due fattori, triangolari, sono invertibili se e solo se tutti gli elementi sulla diagonale principale sono diversi da zero. Verificata quest'ultima condizione, la soluzione x^* del sistema

$$BCDx = b$$

si ottiene determinando:

(1) la soluzione z_1 del sistema $Bx = b$ con la procedura SI, ovvero $z_1 = \mathtt{SI}(B, b)$,

(2) la soluzione z_2 del sistema $Cx = z_1$ ovvero $z_2 = C^{\mathsf{T}} z_1$,

(3) la soluzione z_3 del sistema $Dx = z_2$ con la procedura SA, ovvero $z_3 = \mathtt{SA}(D, z_2)$

e ponendo, infine, $x^* = z_3$.

Problema 3

Si ha:

$$f'(x) = a - b \operatorname{sen} x \qquad , \qquad f''(x) = -b \cos x$$

I coefficienti a, b e c devono dunque verificare le condizioni:

$$f(0) = b + c = \alpha_1 \qquad , \qquad f'(\pi) = a = \alpha_2 \qquad , \qquad f''(\pi) = b = \alpha_3$$

da cui il sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

La matrice è invertibile quindi il sistema ha una sola soluzione:

$$z^* = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_3 \end{bmatrix}$$

L'unico elemento di F che verifica le condizioni richieste è allora:

$$f(x) = \alpha_2\, x + \alpha_2 \cos x + (\alpha_1 - \alpha_3)$$