# Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Compito del 5 giugno 2025

## Problema 1

L'errore relativo $\varepsilon$ commesso approssimando $x \in \mathbb{R}$ con $\xi = 2^{-1} \cdot 0.11$ verifica la relazione:

$$|\varepsilon| \leqslant \tfrac{1}{8}$$

Determinare il più piccolo intervallo di $\mathbb{R}$ contenente $x$.

## Problema 2

Si consideri l'equazione:

$$e^x = 2 - x^2$$

(a) Determinare il numero di radici dell'equazione assegnata.

(b) Per ciascuna delle radici, decidere se il metodo di Newton applicato alla funzione

$$F(x) = e^x + x^2 - 2$$

sia utilizzabile per l'approssimazione.

## Problema 3

Determinare la parabola con vertice nell'origine che meglio approssima i dati:

$$(-1, 2) \quad , \quad (0, 0) \quad , \quad (1, 1)$$

nel senso dei minimi quadrati e calcolare lo scarto quadratico relativo alla parabola determinata.

Risultati e calendario orali → `https://pagine.dm.unipi.it/~a008363/x-didattica.php`

## Soluzione

### Problema 1

Per definizione di errore relativo $\varepsilon$ commesso approssimando $x$ con $\xi$ si ha:

$$\varepsilon = \frac{\xi - x}{x} \qquad \text{da cui} \qquad x = \frac{\xi}{1+\varepsilon}$$

Poiché per ipotesi:

$$|\varepsilon| \leqslant \tfrac{1}{8}$$

si deduce:

$$x \in \left[\frac{\xi}{1+\frac{1}{8}}, \frac{\xi}{1-\frac{1}{8}}\right]$$

ovvero, essendo $\xi = \frac{3}{8}$:

$$x \in \left[\tfrac{1}{3}, \tfrac{3}{7}\right]$$

### Problema 2

Disegnando i grafici delle funzioni $e^x$ e $2 - x^2$ sullo stesso piano certesiano si *intuisce* che l'equazione dovrebbe avere due radici. Per appurare se le cose stanno effettivamente così possiamo procedere nel modo seguente.

La funzione $F(x)$ ha per zeri tutte e sole le radici dell'equazione assegnata. Inoltre $F(x)$ ha derivate prima e seconda e:

$$F'(x) = e^x + 2x \qquad , \qquad F''(x) = e^x + 2$$

Essendo $F''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, se ne deduce che $F$ ha *al più due* zeri. Infine, si constata che, ad esempio:

$$F(0) = -1 < 0 \quad , \quad F(\sqrt{2}) = e^{\sqrt{2}} > 0 \quad , \quad F(-\sqrt{2}) = e^{-\sqrt{2}} > 0$$

Per il Terorema di esistenza degli zeri si conclude che $F(x)$ ha effettivamente due zeri separati dagli intervalli:

$$\alpha_1 \in (-\sqrt{2}, 0) \qquad , \qquad \alpha_2 \in (0, \sqrt{2})$$

Per la continuità di $F'(x)$, decidere se il metodo di Newton sia utilizzabile per approssimare $\alpha_k$ equivale a decidere se $F'(\alpha_k) \neq 0$.

Poiché $\alpha_2 > 0$ e

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad F'(x) > 0$$

allora il metodo è certamente *utilizzabile per approssimare* $\alpha_2$.

Il ragionamento per l'altro zero è un pochino più articolato perché $F'(x)$ è monotona crescente (si deduce dall'essere $F''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$) ed ha uno zero in $(-1, 0)$ (perché $F'(-1) = \frac{1}{e} - 2 < 0$ e $F'(0) = 1 > 0$). Potrebbe dunque essere $F'(\alpha_1) = 0$. Ma: $F(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ e quindi $\alpha_1 \in (-\sqrt{2}, -1)$ ovvero $\alpha_1 < -1$. Allora si ha necessariamente $F'(\alpha_1) < 0$. Si conclude che il metodo è certamente *utilizzabile anche per approssimare* $\alpha_1$.

Problema 3

L'insieme delle parabole con vertice nell'origine è lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ generato da $x^2$. Allora il sistema che traduce le condizioni di interpolazione dei dati è $Az = b$ con:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il coefficiente che individua la parabola che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati si ottiene dalla soluzione di $Az = b$ *nel senso dei minimi quadrati*. Le equazioni normali associate al sistema sono:

$$A^{\mathsf{T}} A z = A^{\mathsf{T}} b \qquad \text{ovvero} \qquad 2z = 3$$

L'unica soluzione è $z = \frac{3}{2}$ e la parabola che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati è allora:

$$y = \tfrac{3}{2}\, x^2$$