Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Compito del 10 aprile 2025

Problema 1

Sia $M = F(2,3)$. Determinare il massimo ed il minimo dell'insieme:

$$I = \{\, \xi \in M \text{ tali che } \tfrac{4}{3} \leqslant \xi \leqslant 17 \,\}$$

Problema 2

Per ogni $x > 0$, sia $h(x) = \ln x + 10$. Determinare il numero di punti uniti di h e, per ciascun punto unito, decidere se il metodo ad un punto definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione.

Problema 3

Siano:

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calcolare una fattorizzazione QR di A ed utilizzarla per determinare le soluzioni di $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati.

Risultati e calendario orali → `https://pagine.dm.unipi.it/~a008363/x-didattica.php`

Soluzione

Problema 1

Si ha:

$$2^0 \leqslant \frac{4}{3} < 2^1$$

dunque:

$$\frac{4}{3} = 2^1 \cdot g \quad \text{con} \quad g = \frac{2}{3}$$

La scrittura posizionale di g in base due risulta:

$$g = 0.\overline{10}$$

Allora gli elementi di M adiacenti a $\frac{4}{3} = 2^1 \cdot 0.\overline{10}$ sono:

$$\xi_- = 2^1 \cdot 0.101 \quad \text{e} \quad \xi_+ = \sigma(\xi_-) = 2^1 \cdot 0.110$$

Essendo:

$$\xi_- < \frac{4}{3} < \xi_+$$

si deduce che il *minimo* dell'insieme I è $\xi_+ = 2^1 \cdot 0.110 = \frac{3}{2}$.

Analogamente, si ha:

$$17 = 10001 = 2^5 \cdot 0.10001$$

Allora gli elementi di M adiacenti a 17 sono:

$$\theta_- = 2^5 \cdot 0.100 \quad \text{e} \quad \theta_+ = \sigma(\theta_-) = 2^5 \cdot 0.101$$

Essendo:

$$\theta_- < \frac{4}{3} < \theta_+$$

si deduce che il *massimo* dell'insieme I è $\theta_- = 2^5 \cdot 0.100 = 16$.

Problema 2

Posto, per ogni $x > 0$, $F(x) = h(x) - x = \ln x + 10 - x$, si ha che i punti uniti di h sono tutti e soli gli zeri di F. Essendo $F'(x) = \frac{1}{x} - 1$ e $F''(x) = -\frac{1}{x^2}$ si ha che per ogni $x > 0$ risulta $F''(x) < 0$, quindi F ha al più due zeri. Poiché:

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = -\infty \quad \text{e} \quad F(1) = 9 > 0$$

per il teorema di esistenza degli zeri esiste $\alpha_1 \in (0, 1)$ tale che $F(\alpha_1) = 0$. Inoltre:

$$F(20) < 0$$

dunque, per lo stesso teorema, esiste $\alpha_2 \in (1, 20)$ tale che $F(\alpha_2) = 0$. Se ne deduce che $F(x)$ ha due zeri e quindi $h(x)$ *ha due punti uniti*.

Per decidere l'utilizzabilità del metodo per approssimare il punto unito α occorre decidere se $|h'(\alpha)| < 1$. Si ha:

$$h'(x) = \frac{1}{x}$$

Allora: essendo $\alpha_1 \in (0, 1)$ si ha $|h'(\alpha_1)| > 1$ ed il metodo *non è utilizzabile* per approssimare α_1; essendo $\alpha_2 \in (1, 20)$ si ha $|h'(\alpha_2)| < 1$ ed il metodo *è utilizzabile* per approssimare α_2.

Problema 3

Una fattorizzazione QR di A si ottiene dalla procedura GS, che termina certamente perché A ha colonne linearmente indipendenti:

$$U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad T = \sqrt{5}$$

L'insieme delle soluzioni di $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati, che ha un solo elemento perché A ha colonne linearmente indipendenti, si determina risolvendo le equazioni normali $A^{\mathsf{T}}Ax = A^{\mathsf{T}}b$. Queste equazioni, utilizzando la fattorizzazione QR di A trovata sopra, sono equivalenti al sistema $Tx = U^{\mathsf{T}}b$. *La soluzione di $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati risulta*:

$$x^* = \frac{3}{5}$$