Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Compito del 12 febbbraio 2025

Problema 1

Studiare il condizionamento (in termini di errore relativo) della funzione

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$$

nel caso in cui x_1, x_2 e x_3 siano tre numeri reali *positivi*.

Problema 2

Sia $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice *triangolare inferiore*.

Descrivere una procedura che decida se T sia invertibile e, in caso affermativo, che calcoli la matrice inversa T^{-1}.

Problema 3

La somma dei quadrati dei primi n numeri naturali verifica la relazione:

$$1^2 + \cdots + n^2 = c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + c_3 n^3$$

con $c_0, \ldots, c_3$ numeri reali opportuni.

Formulare il problema di determinare i coefficienti $c_0, \ldots, c_3$ come un problema di *interpolazione polinomiale* e scrivere il sistema di equazioni lineari che dovrebbe essere risolto per determinare $c_0, \ldots, c_3$.

Soluzione

Problema 1

Studiare il condizionamento in termini di errore relativo della funzione $f(x_1, x_2, x_3)$ significa decidere quanto può essere grande l'errore ralativo

$$\theta = \frac{f\big((1+\epsilon_1)x_1, (1+\epsilon_2)x_2, (1+\epsilon_3)x_3\big) - f(x_1, x_2, x_3)}{f(x_1, x_2, x_3)}$$

in funzione della grandezza degli errori relativi $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$.

Nel caso in esame si ha:

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{\big((1+\epsilon_1)x_1 + (1+\epsilon_2)x_2 + (1+\epsilon_3)x_3\big) - (x_1 + x_2 + x_3)}{x_1 + x_2 + x_3} = \\ &= \frac{\epsilon_1 x_1 + \epsilon_2 x_2 + \epsilon_3 x_3}{x_1 + x_2 + x_3} = \frac{x_1}{x_1 + x_2 + x_3}\,\epsilon_1 + \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3}\,\epsilon_2 + \frac{x_3}{x_1 + x_2 + x_3}\,\epsilon_3\end{aligned}$$

Allora, tenuto conto che x_1, x_2 ed x_3 sono numeri *positivi*:

$$|\,\theta\,| \leqslant \frac{x_1}{x_1 + x_2 + x_3}\,|\epsilon_1| + \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3}\,|\epsilon_2| + \frac{x_3}{x_1 + x_2 + x_3}\,|\epsilon_3|$$

Inoltre, posto $E = \max\{\,|\epsilon_1|, |\epsilon_2|, |\epsilon_3|\,\}$, per $k = 1, 2, 3$ si ha: $|\epsilon_k| \leqslant E$ e quindi:

$$\begin{aligned}&\frac{x_1}{x_1 + x_2 + x_3}\,|\epsilon_1| + \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3}\,|\epsilon_2| + \frac{x_3}{x_1 + x_2 + x_3}\,|\epsilon_3| \leqslant \\ &\qquad \leqslant \left(\frac{x_1}{x_1 + x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3} + \frac{x_3}{x_1 + x_2 + x_3}\right) E = E\end{aligned}$$

Si conclude allora che:

$$|\,\theta\,| \leqslant E$$

dunque il calcolo della somma $x_1 + x_2 + x_3$, per addendi positivi, è *sempre ben condizionato*.

Problema 2

Una possibile procedura è la seguente (si indica con e_k la k-esima colonna della matrice identità $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e con t_{ij} l'elemento di posto i, j della matrice T):

`se` esiste i tale che $t_{ii} = 0$ `allora` STOP
  `altrimenti`
    `per` $k = 1, \ldots, n$ `ripeti` $c_k = \mathtt{SA}(T, e_k)$ `fine`;
    $T^{-1} = (c_1, \ldots, c_n)$
`fine`

La procedura si giustifica considerando che: (a) $\det T = t_{11} \cdots t_{nn}$; (b) se T è invertibile, la k-esima colonna c_k della matrice inversa T^{-1} è la soluzione del sistema $Tx = e_k$; e (c) essendo T triangolare inferiore la solutione del sistema $Tx = e_k$ si ottiene con la procedura `SA`.

Una procedura che richiede un minor numero di operazioni aritmetiche, e che si giustifica considerando che se T è una matrice triangolare inferiore invertibile allora la matrice inversa T^{-1} è anch'essa triangolare inferiore, è la seguente (se $k \in \{\,2, \ldots, n\,\}$, u_{n-k+1} indica la prima colonna della matrice identità I_{n-k+1} di ordine $n-k+1$; per le sottomatrici e le porzioni di colonne si utilizza la simbologia usuale di *Scilab*):

```
se esiste i tale che T_ii = 0 allora STOP
   altrimenti
      c_1 = SA(T, e_1);
      per k = 2, ..., n ripeti
          c = SA(T(k : n, k : n), u_{n-k+1}) ∈ R^{n-k+1};
          c_k(1 : k-1) = 0 ∈ R^{k-1}; c_k(k : n) = c
      fine;
      T^{-1} = (c_1, ..., c_n)
fine
```

Problema 3

Posto $S_n = 1^2 + \cdots + n^2$, il problema consiste nel determinare l'elemento $p(n) \in P_3(\mathbb{R})$ che interpola i dati (ottenuti per $n = 1, \ldots, 4$, ma va bene anche considerare quelli ottenuti da quattro qualsiasi valori distinti di $n \in \mathbb{N}$):

n	1	2	3	4
S_n	1	5	14	30

Per risolvere il problema si sceglie una base di $P_3(\mathbb{R})$ e si impongono le condizioni di interpolazione. Ad esempio, scegliendo la base di Newton:

$$1, n-1, (n-1)(n-2), (n-1)(n-2)(n-3)$$

si ottiene il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} c = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 16 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Proseguendo, si ottiene la solutione:

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5/2 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

e quindi:

$$p(n) = 1 + 4(n-1) + \tfrac{5}{2}(n-1)(n-2) + \tfrac{1}{3}(n-1)(n-2)(n-3)$$

che, rimaneggiando, porta alla usuale formula:

$$p(n) = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$