Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Compito del 27 gennaio 2025

Problema 1

Sia $M = F(10, m)$ con m numero intero positivo e $\mathrm{rd} : \mathbb{R} \to M$ la funzione arrotondamento in M.

Per ogni numero reale $r > 0$ si approssima

$$L = 2\pi r$$

con

$$\lambda = 2\,\mathrm{rd}(\pi)\,\mathrm{rd}(r)$$

(a) Determinare, motivando la risposta, un valore di m che garantisce che il valore assoluto dell'errore relativo commesso approssimando L con λ non supera 10^{-2}.

(b) Con il valore di m determinato nel punto (a), determinare $\mathrm{rd}(\pi)$ sapendo che

$$\pi = 3.1415926535\cdots$$

Problema 2

Per ogni $x > 0$ sia

$$h(x) = ax^2 + b \ln x$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare a, b in modo che $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 2$ siano punti uniti di h.

(b) Con i valori di a e b trovati in (a), determinare il numero di punti uniti di h.

Problema 3

La relazione che lega il valore G di una grandezza fisica al valore ℓ di un'altra è:

$$G = \alpha\,\ell + \beta/\ell$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alcune misure forniscono i dati:

$$\begin{array}{c|ccc} \ell & \ell_1 & \cdots & \ell_k \\ \hline G & G_1 & \cdots & G_k \end{array} \qquad , \qquad k > 2$$

Indicare un procedimento per determinare i valori da assegnare ai coefficienti α e β in modo che la relazione risulti la migliore approssimazione dei dati nel senso dei minimi quadrati.

Risultati e calendario orali → `https://pagine.dm.unipi.it/~a008363/x-didattica.php`

Soluzione

Problema 1

(a) Si ricordi che: dato $x \in \mathbb{R}$ esiste $\epsilon \in \mathbb{R}$ (dipendente da x) tale che

$$\mathrm{rd}(x) = (1+\epsilon)\,x \quad \text{e} \quad |\epsilon| \leqslant u$$

dove u è la precisione di macchina in M. Utilizzando ripetutamente questo risultato si ottiene:

$$\lambda = 2\,(1+\epsilon_1)\,\pi\,(1+\epsilon_2)\,r$$

con $|\epsilon_1| \leqslant u$ e $|\epsilon_2| \leqslant u$. Posto

$$(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2) = 1 + E$$

ovvero

$$E = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_2$$

si ottiene:

$$\lambda = (1+E)L$$

e quindi E è l'errore relativo commesso approssimando L con λ. Per tale errore, tenuto conto delle limitazioni su $|\epsilon_1|$ e $|\epsilon_2|$ si ha:

$$|E| \leqslant |\epsilon_1| + |\epsilon_2| + |\epsilon_1\epsilon_2| \leqslant 2u + u^2$$

Poiché per ogni $m > 0$ si ha $u < 1$, se ne deduce che $2u + u^2 < 3u$ e quindi:

$$|E| < 3u$$

L'errore verifica certamente la condizione richiesta nel testo se:

$$3u = 3 \cdot \tfrac{1}{2} 10^{1-m} = 15 \cdot 10^{-m} < 10^{-2}$$

e quest'ultima disuguaglianza è verificata a partire da $m = 4$.

(b) Con $m = 4$ si ha:

$$\pi = 10^1 \cdot 0.31415926535\cdots \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rd}(\pi) = 10^1 \cdot 0.3142 = 3.142$$

Problema 2

(a) Le condizioni richieste sulla funzione h sono:

$$\begin{cases} h(1) = 1 \\ h(2) = 2 \end{cases}$$

dalle quali si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 4a + b\ln 2 = 2 \end{cases}$$

Se ne ricavano i valori

$$a = 1 \quad , \quad b = -\frac{2}{\ln 2}$$

L'unica funzione della forma richiesta che verifica le condizioni è allora:

$$h(x) = x^2 - \frac{2}{\ln 2}\ln x$$

(b) Si consideri la funzione, definita per $x > 0$:

$$F(x) = h(x) - x = x^2 - x - \frac{2}{\ln 2} \ln x$$

Gli zeri di F sono tutti e soli i punti uniti di h. Naturalmente $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 2$ sono zeri di F, ma potrebbero essercene altri. Per determinare il numero di zeri di F consideriamo le derivate F' e F'', certamente esistenti nell'insieme di definizione di F:

$$F'(x) = 2\,x - 1 - \frac{2}{x\,\ln 2} \quad , \quad F''(x) = 2 + \frac{2}{x^2\,\ln 2}$$

Poiché la derivata seconda è diversa da zero per ogni $x > 0$, se ne deduce che F non può avere più di due zeri. Dunque α_1 e α_2 sono gli unici zeri di F, ovvero gli unici punti uniti di h.

Problema 3

Tra tutte le funzioni in $F = \mathrm{span}\{\ell, 1/\ell\}$ si cercano quelle che meglio approssimano i dati (sperimentali) nel senso dei minimi quadrati. I (due) coefficienti richiesti, α e β, sono le componenti delle soluzioni nel senso dei minimi quadrati del sistema $Ac = b$ che traduce le condizioni di interpolazione. Quest'ultimo è un sistema nell'incognita $c = (\alpha, \beta)^\mathsf{T}$ che ha tante equazioni quanti sono i dati (k). La matrice $A \in \mathbb{R}^{k\times 2}$ del sistema si ottiene, per colonne, calcolando in $\ell_1, \ldots, \ell_k$ le funzioni ℓ e $1/\ell$ che generano F. La colonna $b \in \mathbb{R}^k$ termine noto del sistema ha per componenti i valori da interpolare $G_1, \ldots, G_k$. Si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \ell_1 & 1/\ell_1 \\ \vdots & \vdots \\ \ell_k & 1/\ell_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_k \end{bmatrix}$$

Le soluzioni del sistema $Ac = b$ nel senso dei minimi quadrati sono le soluzioni del sistema delle equazioni normali $A^\mathsf{T} Ac = A^\mathsf{T} b$:

$$\begin{bmatrix} \ell_1^2 + \cdots + \ell_k^2 & k \\ k & 1/\ell_1^2 + \cdots + 1/\ell_k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1\,G_1 + \cdots + \ell_k\,G_k \\ G_1/\ell_1 + \cdots + G_k/\ell_k \end{bmatrix}$$

Per ciascuna soluzione (unica, salvo casi particolari) si individua un elemento di F che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati.