Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Compito del 9 gennaio 2025

Problema 1

Sia $M = F(2, 53)$.

(a) Determinare il minimo numero intero positivo Z *non* appartenente ad M.

(b) Determinare gli elementi di M adiacenti a Z.

Problema 2

Sia $F(x) = x^2$. Si applica il metodo di Newton ad F.

(a) Determinare la successione generata dal metodo a partire da $x_0 = 1$.

(b) Determinare l'ordine di convergenza del metodo quando utilizzato per approssimare $\alpha = 0$.

Problema 3

Determinare la retta che meglio approssima i dati:

$$(-2, 1) \quad , \quad (-1, 0) \quad , \quad (0, 1) \quad , \quad (1, 0) \quad , \quad (2, 1)$$

nel senso dei minimi quadrati.

Risultati e calendario orali → `https://pagine.dm.unipi.it/~a008363/x-didattica.php`

Soluzione

Problema 1

(a) In $M = F(2, 53)$ sono inclusi tutti i numeri interi positivi la cui scrittura posizionale in base due ha lunghezza non superiore alla precisione 53 (ad esempio: $12 = 1100 = 2^4 \cdot 0.1100$), dunque tutti gli interi positivi fino a $2^{53} \cdot 0.1 \cdots 1 = 2^{53}(1-2^{-53}) = 2^{53}-1$. Anche il numero intero successivo, 2^{53}, appartiene ad M, infatti $2^{53} = 2^{54} \cdot 0.1$. Quello ancora successivo, invece, è il più piccolo che *non* appartiene ad M, infatti: $2^{53} + 1 = 2^{54}(0.1 + 2^{-54}) = 2^{54} \cdot 0.\underbrace{10 \cdots 0}_{53}1 \notin M$. Dunque: $Z = 2^{53} + 1$.

(b) Gli elementi di M adiacenti a Z sono allora $\xi_- = 2^{54} \cdot 0.1 = 2^{53}$ e $\xi_+ = \sigma(\xi_-) = 2^{54} \cdot 0.10 \cdots 01 = 2^{54}(0.1 + 2^{-53}) = 2^{53} + 2$.

Problema 2

(a) Il metodo di Newton applicato alla funzione $F(x)$ è il metodo ad un punto definito da

$$h(x) = x - \frac{x^2}{2x} = \tfrac{1}{2}\, x$$

La successione generata a partire da $x_0 = 1$ è allora $x_k = (\frac{1}{2})^k$. Il metodo risulta utilizzabile ($h'(x) = \frac{1}{2}$) e la successione converge ad $\alpha = 0$, l'unico zero di $F(x)$.

(b) Come osservato al punto precedente, il metodo è utilizzabile per approssimare lo zero α e, essendo $h'(\alpha) \neq 0$, l'ordine di convergenza richiesto è *uno*.

Problema 3

Le rette richieste corrispondono agli elementi di $P_1(\mathbb{R})$ che meglio approssimano i dati nel senso dei minimi quadrati. Scelta $1, x$ come base di $P_1(\mathbb{R})$, si cercano le combinazioni lineari degli elementi della base che individuano gli elementi richiesti. I coefficienti di queste ultime sono le componenti delle soluzioni nel senso dei minimi quadrati del sistema che traduce le condizioni di interpolazione:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ovvero dalle soluzioni del sistema delle equazioni normali:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quest'ultimo sistema ha un'unica soluzione:

$$x^* = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

dunque esiste una sola retta che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati:

$$y = \tfrac{3}{5}$$