Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Compito del 14 febbraio 2024

Problema 1

Siano M un insieme di numeri in virgola mobile con esponente non limitato, u la precisione di macchina in M e x un numero reale positivo. Approssimando x con $\xi = 4 \in M$ si commette un errore relativo ε tale che:

$$|\varepsilon| \leqslant 5u < 1$$

Determinare il più piccolo intervallo di $\mathbb{R}$ che certamente contiene x.

Problema 2

Si consideri l'equazione:

$$e^x = -x^3$$

Determinare il numero di soluzioni dell'equazione e separarle. Indicare poi, per ciascuna soluzione, un metodo iterativo *utilizzabile* per l'approssimazione.

Problema 3

Si consideri il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determinare *tutte* le soluzioni del sistema nel senso dei minimi quadrati e poi indicare quella di minima norma due.

Risultati e calendario orali → `https://pagine.dm.unipi.it/~a008363/x-didattica.php`

Soluzione

Problema 1

Si riscriva la definizione di errore relativo ε commesso approssimando x con ξ nella forma:

$$\xi = (1+\varepsilon)x$$

Allora:

$$x = \frac{\xi}{1+\varepsilon}$$

Poiché:

$$-5u \leqslant \varepsilon \leqslant 5u \qquad \Leftrightarrow \qquad 1-5u \leqslant 1+\varepsilon \leqslant 1+5u$$

allora (si ricordi che $5u < 1$ e quindi $1-5u > 0$):

$$\frac{1}{1+5u} \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon} \leqslant \frac{1}{1-5u}$$

Infine:

$$\frac{\xi}{1+5u} \leqslant \frac{\xi}{1+\varepsilon} = x \leqslant \frac{\xi}{1-5u}$$

e l'intervallo richiesto è:

$$x \in \left[\frac{4}{1+5u}\ ,\ \frac{4}{1-5u}\right]$$

Problema 2

Le soluzioni dell'equazione sono gli zeri della funzione

$$f(x) = e^x + x^3$$

Si ha:

$$f'(x) = e^x + 3x^2$$

che risulta positiva per ogni x. Quindi f è una funzione monotona crescente ed ha, al più, uno zero. Verificato che, ad esempio, $f(0) = 1 > 0$ e $f(-1) = e^{-1} - 1 < 0$ si deduce che f ha un solo zero separato dall'intervallo $[-1, 0]$.

Infine, poich'e per ogni $x \in [-1, 0]$ si ha $f'(x) \neq 0$, per approssimare lo zero si può certamente utilizzare in metodo di Newton applicato ad f.

Problema 3

Le soluzioni del sistema nel senso dei minimi quadrati sono le soluzioni del sistema delle equazioni normali

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si osservi che la matrice F di quest'ultimo sistema non è invertibile (conseguenza dell'essere linearmente dipendenti le colonne della matrice del sistema iniziale). Inoltre si constata immediatamente che la colonna

$$x_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

è soluzione del sistema delle equazioni normali. Allora l'insieme S di tutte le soluzioni si ottiene aggiungendo a x_p il nucleo della matrice F. Si ottiene

$$S = x_p + \ker F = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \operatorname{span}\Big(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Big)$$

Rappresentando S in un piano cartesiano (si ottiene la retta parallela all'asse delle ordinate passante per il punto $(\frac{1}{3}, 0)$) si deduce che la soluzione di minima norma due (ovvero quella più vicina all'origine degli assi) è x_p.