Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Compito del 29 gennaio 2024

Problema 1

Siano $M = F_d(2, 4, -10, 10)$ e $A = \{\xi \in M \text{ t.c. } 2^{-16} \leqslant \xi \leqslant 17\}$. Determinare il numero di elementi di A.

Problema 2

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione LR con pivoting di A ed utilizzarla per determinare la soluzione del sistema

$$Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Problema 3

Si considerino i dati

$$(-1, 1) \quad , \quad (0, 1) \quad , \quad (1, 0)$$

Determinare la forma di Lagrange del polinomio interpolante.

Risultati e calendario orali → `https://pagine.dm.unipi.it/~a008363/x-didattica.php`

Soluzione

Problema 1

Il più piccolo elemento positivo di M è $\xi_{\min} = 2^{-10} \cdot 0.0001 = 2^{-14}$. Poiché $2^{-16} < \xi_{\min}$, allora $\xi_{\min}$ è il minimo di A. Inoltre, $17 = 10001 = 2^5 \cdot 0.10001 \notin M$. Gli elementi di M adiacenti a 17 sono $2^5 \cdot 0.1000 = 16 \in A$ e $\sigma(2^5 \cdot 0.1000) = 2^5 \cdot 0.1001 = 18 \notin A$. Allora il massimo di A è $2^5 \cdot 0.1000$. Gli elementi di A sono quindi: tutti gli elementi denormalizzati positivi in M (7 in tutto), tutti gli elementi normalizzati positivi di M con esponente $-10, -9, \cdots, 4$ (15×8 perchè gli elementi normalizzati di M con uno stesso esponente sono 8) e il massimo di M, unico elemento con esponente 5. In totale gli elementi sono: $7 + 15 \times 8 + 1 = 16 \times 8 = 128$.

Problema 2

Utilizzando la proceduta EGP si ottiene la fattorizzazione:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tale che $PA = SD$. Detta b la colonna termine noto del sistema da risolvere, la soluzione del sistema si ricava poi considerando che $Ax = b$ è equivalente a $PAx = Pb$ che si riscrive $SDx = Pb$. Allora la soluzione x^* si ottiene calcolando $c = \mathrm{SA}(S, Pb)$ e poi $x^* = \mathrm{SI}(D, c)$. Si ha: $Pb = b$, $c = b$ e infine

$$x^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Problema 3

I dati sono tre. Allora il polinomio interpolante è l'unico elemento di $P_2(\mathbb{R})$ che li interpola. Scelta per $P_2(\mathbb{R})$ la base di Lagrange:

$$\begin{aligned} \ell_0(x) &= \frac{x(x-1)}{(-1)(-1-1)} = \frac{x(x-1)}{2} \\ \ell_1(x) &= \frac{(x+1)(x-1)}{(1)(-1)} = -(x+1)(x-1) \\ \ell_2(x) &= \frac{(x+1)x}{(1+1)(1)} = \frac{(x+1)x}{2} \end{aligned}$$

il sistema che traduce le condizioni di interpolazione, come noto, è:

$$Ic = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui il polinomio cercato:

$$p(x) = 1 \cdot \ell_0(x) + 1 \cdot \ell_1(x) + 0 \cdot \ell_2(x) = \frac{x(x-1)}{2} - (x+1)(x-1)$$