# Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Compito del 10 gennaio 2024

### Problema 1

Siano $x = 0.71$ e $M = F(2,4)$. Determinare $\mathrm{rd}(x)$ in $M$, calcolare $\delta(x)$ e, detta $u$ la precisione di macchina in $M$, decidere se $|\delta(x)| < u$.

### Problema 2

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione QR di $A$.

### Problema 3

Per ogni $x \neq 2$, sia

$$h(x) = \frac{1}{2-x}$$

(a) Determinare i punti uniti di $h(x)$.

(b) Per ciascuno dei punti uniti, decidere se per l'approssimazione sia utilizzabile il metodo iterativo definito da $h(x)$ e, in caso affermativo, determinare un punto iniziale a partire dal quale la successione generata dal metodo risulti convergente al punto unito.

## Soluzione

### Problema 1

Poiché

$$2^{-1} < x \leqslant 2^0$$

l'esponente di $x$ è $b = 0$ e la frazione è $g = 0.71$. La scrittura posizionale di $g$ in base due si ottiene con il procedimento usuale e risulta:

$$g = 0.10110\cdots$$

Gli elementi di $M$ adiacenti ad $x$ sono allora $\xi_- = 2^0\, 0.1011$ e $\xi_+ = \sigma(\xi_-) = 2^0\, 0.1100$. Il punto medio del segmento di estremi $\xi_-, \xi_+$ è $\mu = 2^0\, 0.10111 > x$ e quindi $\mathrm{rd}(x) = \xi_- = 2^0\, 0.1011 = \frac{11}{16}$.

Allora:

$$\delta(x) = \mathrm{rd}(x) - x = \frac{11}{16} - \frac{71}{100} = -\frac{9}{400}$$

e, essendo $u = 2^{-4} = \frac{1}{16}$ si constata che $|\delta(x)| < u$ (allo stesso risultato si perviene ricordando che in ogni caso si ha $|\delta(x)| < u|x|$ e osservando che $|x| < 1$).

### Problema 2

Le colonne di $A$ sono linearmente indipendenti. Utilizzando la procedura GS si determina la fattorizzazione

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{2/3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \quad , \quad T = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3/2} \end{bmatrix}$$

### Problema 3

I punti uniti di $h(x)$ sono le soluzioni dell'equazione $h(x) = x$, equivalente all'equazione:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad (x-1)^2 = 0$$

quindi $h(x)$ ha *un solo punto unito*, $\alpha = 1$.

La funzione $h(x)$ ha, nel suo dominio, derivata prima continua. Allora per decidere dell'utilizzabilità del metodo è necessario e sufficiente conoscere $|h'(\alpha)|$. Si ha $h'(\alpha) = 1$, dunque il metodo *non è utilizzabile*. Si osservi comunque che, come si può constatare graficamente, per quasi ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ la successione generata dal metodo iterativo definito da $h(x)$ a partire da $x_0$ è convergente ad $\alpha$ (precisamente: i punti iniziali da escludere sono il sottoinsieme numerabile di $(1, 2)$ costituito dalla successione $y_k$ definita da $h(y_1) = 2$ e $h(y_k) = y_{k-1}$ per $k > 1$; per tali punti iniziali il metodo *non* genera una successione).