Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Compito del 15 febbraio 2023

Problema 1

Determinare il più piccolo intervallo ad estremi in $M = F(2,4)$ che contiene 37. Quanti elementi di $F(2,6)$ sono contenuti nell'intervallo determinato?

Problema 2

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e:

$$h(x) = \begin{cases} ax + b & \text{per } x < 0 \\ e^{-x} + 2 & \text{per } x \geqslant 0 \end{cases}$$

(i) Determinare a e b in modo che la funzione $h(x)$ abbia derivata prima continua su $\mathbb{R}$.

(ii) Con i valori di a e b trovati in (i), determinare il numero di punti uniti di h e, per ciascuno di essi, decidere se il metodo ad un punto definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione.

Problema 3

Si considerino le seguenti istruzioni *Scilab*:

```
A = [1,-1;-1,1];
B = A .* A;
C = A == B;
[D,E] = log2(A);
```

Indicare il valore delle variabili `A`, `B`, `C`, `D`, `E` dopo gli assegnamenti.

Risultati e calendario orali → `https://pagine.dm.unipi.it/~a008363/x-didattica.php`

Soluzione

Problema 1

Si ha:

$$37 = 2^6 \cdot 0.100101$$

dunque $37 \notin M$. L'intervallo cercato è quindi $I = [\xi_-, \xi_+]$, l'intervallo di estremi gli elementi di M *adiacenti* a 37:

$$\xi_- = 2^6 \cdot 0.1001 \quad , \quad \xi_+ = 2^6 \cdot 0.1010$$

Poiché $F(2,4) \subset F(2,6)$, gli elementi di $F(2,6)$ contenuti in I sono i *cinque* numeri con esponente 6 e frazione:

$$0.100100 \quad , \quad 0.100101 \quad , \quad 0.100110 \quad , \quad 0.100111 \quad , \quad 0.101000$$

Problema 2

(i) La richiesta equivale a:

- continuità di $h(x)$ in 0: $\lim_{x\to 0-} h(x) = \lim_{x\to 0+} h(x) \Rightarrow b = 3$;
- esistenza e continuità di $h'(x)$ in 0: $\lim_{x\to 0-} h'(x) = \lim_{x\to 0+} h'(x) \Rightarrow a = -1$.

(ii) Siano $a = -1, b = 3$ e $F(x) = h(x) - x$. Si constata che gli zeri di $F(x)$ sono tutti e soli i punti uniti di $h(x)$. La funzione $F(x)$, come $h(x)$, ha derivata prima continua. Inoltre:

$$F'(x) = \begin{cases} -2 & \text{per } x < 0 \\ -e^{-x} - 1 & \text{per } x \geqslant 0 \end{cases}$$

e per ogni $x \in \mathbb{R}$ è $F'(x) < 0$. Se ne deduce che $F(x)$ ha al più uno zero. Infine: $F(2) = e^{-2} > 0$ e $F(3) = e^{-3} - 1 < 0$ da cui, per il Teorema di esistenza degli zeri, $F(x)$ ha un solo zero, e quindi $h(x)$ ha *un solo punto unito*, $\alpha \in [2,3]$.

Per ogni $x > 0$ si ha poi $|h'(x)| = e^{-x} \in (0,1)$. Se ne deduce che $0 < |h'(\alpha)| < 1$ e il metodo definito da h *è utilizzabile* per l'approssimazione del punto unito (e risulta di ordine uno).

Problema 3

Si ha:

$$\mathtt{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathtt{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathtt{C} = \begin{bmatrix} \mathtt{T} & \mathtt{F} \\ \mathtt{F} & \mathtt{T} \end{bmatrix}$$

Si ricordi che l'operatore `.*` esegue il prodotto *elemento per elemento* dei fattori e che nel caso in esame `==` è l'estensione banale alle matrici dell'operatore di uguaglianza tra elementi di M. Infine:

$$\mathtt{D} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathtt{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ricordi che, se $x = (-1)^s 2^b g \in M$, `[f,e] = log2(`x`)` assegna ad `f` la 'frazione con segno' $(-1)^s g$.