Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Compito dell'1 febbraio 2023

Problema 1

Sia $M = F(2,4)$. Determinare il massimo e il minimo dell'insieme:

$$A = M \cap [\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{3}]$$

Problema 2

Siano:

$$f_0(x) = 1 \quad , \quad f_1(x) = x \quad , \quad f_2(x) = |x|$$

(a) Determinare tutte le $f(x) \in \text{span}\{\, f_0(x), f_1(x), f_2(x) \,\}$ che interpolano i dati:

$$(0,0) \quad , \quad (-1,0) \quad , \quad (1,2)$$

(b) Dimostrare che $f_0(x), f_1(x), f_2(x)$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$.

Problema 3

Scrivere, in *Scilab*, una *function* di intestazione:

```
function s = MaxFE(v)
```

in cui $v = (v_1, v_2) \in M^2$ e $s \in M^2$ è una riga di componenti:

$$s_1 = \begin{cases} 1 & \text{se la frazione di } v_1 \text{ è maggiore di quella di } v_2 \\ 0 & \text{se la frazione di } v_1 \text{ è uguale a quella di } v_2 \\ 2 & \text{se la frazione di } v_1 \text{ è minore di quella di } v_2 \end{cases}$$

e

$$s_2 = \begin{cases} 1 & \text{se l'esponente di } v_1 \text{ è maggiore di quello di } v_2 \\ 0 & \text{se l'esponente di } v_1 \text{ è uguale a quello di } v_2 \\ 2 & \text{se l'esponente di } v_1 \text{ è minore di quello di } v_2 \end{cases}$$

Soluzione

Problema 1

Si ha:

$$2^{-2} = \tfrac{1}{4} \leqslant \tfrac{1}{3} < \tfrac{1}{2} = 2^{-1}$$

quindi l'esponente di $\frac{1}{3}$ in base due è -1 e, di conseguenza, la frazione è $g = \frac{2}{3}$. La scrittura posizionale di g in base due è:

$$g = 0.\overline{10}$$

Gli elementi di M adiacenti a $\frac{1}{3}$ sono allora:

$$\xi_- = 2^{-1} \cdot 0.1010 \quad , \quad \xi_+ = 2^{-1} \cdot 0.1011$$

Dunque:

$$\max A = \xi_- = 2^{-1} \cdot 0.1010 = \tfrac{5}{16}$$

Analogamente:

$$2^{-3} = \tfrac{1}{8} \leqslant \tfrac{1}{6} < \tfrac{1}{4} = 2^{-2}$$

quindi l'esponente di $\frac{1}{6}$ in base due è -2 e, di conseguenza, la frazione è di nuovo $g = \frac{2}{3}$. Ragionando come sopra si determinano gli elementi di M adiacenti a $\frac{1}{6}$:

$$\eta_- = 2^{-2} \cdot 0.1010 \quad , \quad \eta_+ = 2^{-2} \cdot 0.1011$$

Dunque:

$$\min A = \eta_+ = 2^{-2} \cdot 0.1011 = \tfrac{11}{64}$$

Problema 2

(a) Si cercano numeri reali a_0, a_1 e a_2 tali che, posto:

$$F(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$$

si abbia:

$$F(-1) = 0 \quad , \quad F(0) = 0 \quad , \quad F(1) = 2$$

Le condizioni sono equivalenti al sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La matrice dei coefficienti è invertibile e l'unica soluzione del sistema è

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dunque, l'unico elemento che verifica le condizioni richieste è:

$$F(x) = x + |x|$$

(b) Per dimostrare che $f_0(x), f_1(x), f_2(x)$ sono linearmente indipendenti si può procedere per assurdo. Siano a_0^*, a_1^* e a_2^* numeri reali *non tutti nulli* tali che:

$$\text{per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ si ha:} \quad a_0^* f_0(x) + a_1^* f_1(x) + a_2^* f_2(x) = 0$$

In particolare, ponendo $x = -1, x = 0$ e $x = 1$ si deduce che la colonna $\beta \in \mathbb{R}^3$ di componenti a_0^*, a_1^* e a_2^* verifica l'uguaglianza:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Questo è *impossibile* perché, come osservato sopra, la matrice che compare nell'uguaglianza è invertibile e $\beta \neq 0$. Dunque $f_0(x), f_1(x), f_2(x)$ sono linearmente indipendenti.

Problema 3

Una possibile definizione è:

```
function s = MaxFE(v)
 [f1,e1] = log2(abs(v(1)));
 [f2,e2] = log2(abs(v(2)));
 if f1 > f2 then s(1) = 1; end;
 if f1 == f2 then s(1) = 0; end;
 if f1 < f2 then s(1) = 2; end;
 if e1 > e2 then s(2) = 1; end;
 if e1 == e2 then s(2) = 0; end;
 if e1 < e2 then s(2) = 2; end;
endfunction
```

Si ricordi che se `x` è il numero di macchina di segno s, esponente b e frazione g, l'assegnamento

`[f,e] = log2(x)`

assegna ad `e` l'esponente b e ad `f` la 'frazione con segno' $(-1)^s g$.