Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Compito dell'11 gennaio 2023

Problema 1

Siano $m \in \mathbb{N}$, $M = F(2, m)$, rd una funzione di arrotondamento in M e $\delta(x)$ l'errore assoluto commesso approssimando $x \in \mathbb{R}$ con $\mathrm{rd}(x)$. Determinare il *minimo* valore di m tale che:

$$\text{per ogni } x \in [1, 8] \text{ sia } |\delta(x)| < \tfrac{1}{100}$$

Problema 2

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia $h(x) = e^x - 2$

Determinare il numero di punti uniti di h e separarli. Per ciascuno dei punti uniti individuati decidere se il metodo iterativo definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione; in caso affermativo, indicare l'ordine di convergenza del metodo e un punto iniziale x_0 a partire dal quale la successione generata risulta convergente al punto unito.

Problema 3

Sia h la funzione definita nel Problema 2 e si consideri la seguente *function* di *Scilab*:

```
function y = h(x)
   \\ x: un numero di macchina
   \\ y = exp(x) - 2
   y = [1, -2] .* [exp(x), 1]
endfunction
```

La *function* contiene un errore che la rende *inutilizzabile* allo scopo dichiarato nel commento.

Individuare e correggere l'errore in modo da ottenere una *function* che possa essere ragionevolmente utilizzata per approssimare i valori di h.

Soluzione

Problema 1

Si ricordi che: se b è l'esponente di x in base 2, allora $|\delta(x)| \leqslant \frac{1}{2}\, 2^{b-m}$. Nel caso in esame:

$$x \in [1, 8] \quad \Rightarrow \quad 1 \leqslant b \leqslant 4$$

Il minimo valore di m che garantisce $|\delta(x)| < \frac{1}{100}$ per *ogni* x con esponente minore o uguale a 4 è $m = 10$. Si osservi, però, che nell'intervallo $[1, 8]$ c'è *un solo elemento* con esponente uguale a 4: $x = 8$. Ma $\delta(8) = 0$ perché, per $m \geqslant 1$, $8 \in F(2, m)$. Allora: il minimo valore di m che garantisce $|\delta(x)| < \frac{1}{100}$ per ogni $x \in [1, 8]$ è $m = 9$.

Problema 2

Posto $f(x) = h(x) - x = e^x - 2 - x$ si ha: i punti uniti di h sono *tutti e soli* gli zeri di f. Si ha poi: $f'(x) = e^x - 1$. Poiché $x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, allora f ha *al più uno zero* in $(0, +\infty)$. Analogamente, poiché $x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$, allora f ha *al più uno zero* in $(-\infty, 0)$. Dunque f ha *al più due zeri*. Si ha infine:

- $f(0) = -1 < 0$ e $f(-2) = e^{-2} > 0 \Rightarrow$ esiste $\alpha_1 \in [-2, 0]$ zero di f;
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ esiste $\alpha_2 > 0$ zero di f.

Dunque h ha *due* punti uniti. Un intervallo che separa il punto unito α_2 si ottiene constatando che $f(2) = e^2 - 4 > 0$ (perché $e > 2$): $\alpha_2 \in [0, 2]$.

Per l'utilizzabilità del metodo definito da h si deve confrontare, per $k = 1$ e $k = 2$, $|h'(\alpha_k)|$ con 1. Poich'e $h'(x) = e^x$ si ha:

- $\alpha_1 < 0 \Rightarrow 0 < h'(\alpha_1) < 1$: il metodo *è utilizzabile* per approssimare α_1 e l'ordine di convergenza è *uno*;
- $\alpha_2 > 0 \Rightarrow h'(\alpha_1) > 1$: il metodo *non è utilizzabile* per approssimare α_2.

Resta da determinare x_0 a partire dal quale la successione generata dal metodo definito da h risulta convergente a α_1. Poiché per *ogni* $x \in [-2, 0)$ si ha $0 < h'(x) < 1$, allora *qualunque* $x_0 \in [-2, 0)$ soddisfa la richiesta (e la successione risulta monotona).

Problema 3

Se ξ è un numero di macchina allora, dopo l'assegnamento:

```
y = [1, -2] .* [exp(ξ), 1]
```

il valore di `y` è la *riga*:

```
[exp(ξ), -2]
```

Questo valore è *inutilizzabile* come approssimazione di $e^\xi - 2$.

Un modo per ottenere un valore ragionevolmente utilizzabile per l'approssimazione è di sostituire, nell'assegnamento della *function*, l'operatore `.*` con `*` e la riga `[exp(ξ), 1]` con la *colonna* `[exp(ξ); 1]`:

```
y = [1, -2] * [exp(x); 1]
```

Adesso, se il valore di `x` è il numero di macchina ξ, l'istruzione assegna ad `y` il valore:

```
exp(ξ) - 2
```