Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Compitino dell'8 novembre 2022

Problema 1

Siano $M = F(2,5)$ e rd la funzione di arrotondamento in M con RTTE. Dopo aver verificato che $3 \in M$, calcolare

$$\xi = 3 \otimes (1 \oslash 3)$$

Risolvere, infine, lo stesso problema assumendo $M = F_d(2, 5, -50, 50)$ e rd la funzione di arrotondamento in M con RTTE.

Problema 2

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia $f(x) = e^x - x - 2$

Determinare il numero di zeri di f e separarli. Per ciascuno degli zeri individuati: decidere se il metodo di Newton sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermativo, indicare un punto iniziale x_0 a partire dal quale la successione generata del metodo di Newton risulta convergente allo zero.

Problema 3

Scrivere un *function* di *Scilab*, di intestazione

```
y = ContaUno(x)
```

che, detta f la frazione di un assegnato un numero di macchina `x`, restituisce il *numero di cifre uguali a uno* nella scrittura posizionale di f in base due.

Soluzione

Problema 1

L'espressione di tre in base due è 11. Allora $3 = 2^2 \cdot 0.11 \in M$.

Per determinare $\theta = 1 \oslash 3 = \mathrm{rd}(\frac{1}{3})$, calcoliamo l'esponente e la scrittura posizionale della frazione di $\frac{1}{3}$ in base due. Si ha:

$$\tfrac{1}{4} \leqslant \tfrac{1}{3} < \tfrac{1}{2} \qquad \text{da cui} \qquad \tfrac{1}{3} = 2^{-1}g \quad , \quad g = \tfrac{2}{3}$$

Con un procedimento usuale si determina poi la scrittura posizionale di g :

$$g = 0.\overline{10}$$

Dunque:

$$\tfrac{1}{3} = 2^{-1} \cdot 0.\overline{10}$$

Per determinare l'arrotondato si individuano gli elementi di M, ξ_- e ξ_+, adiacenti ad $\frac{1}{3}$:

$$\xi_- = 2^{-1} \cdot 0.10101 \quad \text{(ottenuto troncando la scrittura di } g \text{ alla quinta cifra)}$$

e

$$\xi_+ = \sigma(\xi_-) = 2^{-1} \cdot 0.10110$$

Si confronta poi $\frac{1}{3}$ con il punto medio m dell'intervallo di estremi ξ_-, ξ_+:

$$m = 2^{-1} \cdot 0.101011 > 2^{-1} \cdot 0.\overline{10} = \tfrac{1}{3}$$

Allora:

$$\theta = 1 \oslash 3 = \mathrm{rd}(\tfrac{1}{3}) = \xi_- = 2^{-1} \cdot 0.10101$$

Infine, si calcola $3 \otimes (1 \oslash 3) = \mathrm{rd}(3\theta)$. Procedendo come sopra si ha:

$$3\theta = (2+1)\,\theta = 2\theta + \theta = 0.10101 + 0.010101 = 0.111111$$

e poi:

$$\xi_- = 2^0 \cdot 0.11111 \quad \text{(ottenuto troncando la scrittura di } 3\theta \text{ alla quinta cifra)}$$

e

$$\xi_+ = \sigma(\xi_-) = 2^1 \cdot 0.10000$$

Per il punto medio m dell'intervallo di estremi ξ_-, ξ_+ si ha adesso:

$$m = 2^0 \cdot 0.111111 = 3\theta$$

Allora, utilizzando il criterio RTTE:

$$\mathrm{rd}(3\theta) = \xi_+ = 2^1 \cdot 0.10000 = 1$$

Assumendo $M = F_d(2, 5, -50, 50)$ e rd la funzione di arrotondamento in M con RTTE, i calcoli precedenti restano invariati: tutti gli elementi di volta in volta considerati sono infatti *elementi normalizzati* di $F_d(2, 5, -50, 50)$.

Problema 2

La funzione $f(x)$ è regolare in tutto il suo insieme di definizione, $\mathbb{R}$. Inoltre:

$$f'(x) = e^x - 1 \quad , \quad f''(x) = e^x$$

Poiché per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $f''(x) > 0$, il *numero massimo* di zeri di f è *due*. Inoltre, constatato che:

$$f(0) = -1 < 0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

si deduce che $f(x)$ *ha* due zeri, $\alpha_1 < 0$ e $\alpha_2 > 0$. Per separare gli zeri si osserva che:

$$f(-2) = e^{-2} > 0 \quad , \quad f(-1) = e^{-1} - 1 < 0 \quad (\text{segue da } e > 1)$$

e

$$f(1) = e - 3 < 0 \quad (\text{segue da } e < 3) \quad , \quad f(2) = e^2 - 4 > 0 \quad (\text{segue da } e > 2)$$

Dalle disuguaglianze, per il Teorema di esistenza degli zeri, si ricava:

$$\alpha_1 \in [-2, -1] \quad , \quad \alpha_2 \in [1, 2]$$

Per decidere l'utilizzabilità del metodo di Newton, ricordato che f ha derivata seconda continua per ogni $x \in \mathbb{R}$, basta osservare che:

$$\text{per ogni } x \in [-2, -1] \text{ si ha } f'(x) \neq 0$$

e:

$$\text{per ogni } x \in [1, 2] \text{ si ha } f'(x) \neq 0$$

Dalla prima osservazione si deduce che il metodo è utilizzabile per approssimare α_1, dalla seconda che è utilizzabile per approssimare α_2.

Per determinare un punto iniziale che garantisca la convergenza della successione si osserva che:

$$\text{per ogni } x \in [-2, -1] \text{ si ha } f'(x) \neq 0, f''(x) > 0 \text{ e inoltre } f(-2) > 0$$

e:

$$\text{per ogni } x \in [1, 2] \text{ si ha } f'(x) \neq 0, f''(x) > 0 \text{ e inoltre } f(2) > 0$$

Se ne deduce che: a partire da $x_0 = -2$ si ottiene una successione convergente ad α_1 e *monotona crescente*; a partire da $x_0 = 2$ si ottiene una successione convergente ad α_2 e *monotona decrescente*.

Problema 3

Una realizzazione possibile è:

```
function y = ContaUno(x)
   \\ x: un elemento di F_d(2,53,-1021,1024).
   \\ y: il numero di cifre uguali a uno nella scrittura
   \\    posizionale in base due della frazione di x.
   [f,e] = log2(x);
   \\ Si ricordi che log2(x) restituisce la frazione con segno di x.
   f = abs(f);
   y = 0;
```

```
    for k = 1:53,
        c = int(2 * f);
        if c == 1 then y = y + 1; end;
        f = 2 * f - c;
    end
endfunction
```

Ad esempio, si ha (verificare i risultati!):

```
--> ContaUno(0)
 ans  =

   0.

--> ContaUno(nearfloat('succ',0))
 ans  =

   1.

--> ContaUno(nearfloat('pred',0))
 ans  =

   1.

--> ContaUno(number_properties('huge'))
 ans  =

   53.

--> ContaUno(nearfloat('pred',1))
 ans  =

   53.
```