Test di Calcolo Numerico del 18 febbraio 2022

Test di ammissione alla prova orale

L'indirizzo email della persona che ha risposto (**maurizio.ciampa@unipi.it**) è stato registrato quando hai inviato questo modulo.

Siano $M = F_d(2, 5, -100, 100)$ e $\alpha = 2^{-99} \cdot (\frac{1}{4} + \frac{1}{32})$.

Decidere se $\alpha \in M$ e $\alpha/2 \in M$.

La scrittura posizionale di 1/4 + 1/32 in base due è: 0.01001. Allora:

alfa = 2^(-99) 0.01001 = 2^(-100) 0.1001

e

alfa/2 = 2^(-101) 0.1001 = 2^(-100) 0.01001

Dunque: alfa è un elemento NORMALIZZATO di M, alfa/2 è un elemento DENORMALIZZATO di M.

Sia $\omega \in [0, 2\pi]$ tale che $\alpha = 1$ è punto unito di:

$$h(x) = \operatorname{sen} \omega x$$

Determinare ω e decidere se il metodo iterativo definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione del punto unito $\alpha = 1$.

La condizione alfa = 1 punto unito di h(x) equivale a:

1 = sen(omega)

e l'unico valore di omega in [0 , 2 %pi] che rende vera l'uguaglianza è omega = %pi / 2. In tal caso si ha: | h'(1) | = (%pi / 2) cos(%pi / 2) = 0 < 1. Il metodo è UTILIZZABILE (e l'ordine di convergenza del metodo al punto unito alfa = 1 è almeno 2).

Si osservi che h(x) ha altri due punti uniti: 0 e -1. Il metodo è utilizzabile per approssimare -1, non utilizzabile per approssimare 0.

Decidere se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che:

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ t & 1 \end{bmatrix}$$

è una matrice ortogonale.

Per nessun t in R la seconda colonna di A(t) ha norma uno. Dunque NON ESISTE t in R tale che la matrice A(t) è ortogonale.

Si osservi che, invece, per t = 1 le colonne di A(t) sono ortogonali.

Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che esiste $p \in P_1(\mathbb{R})$ che interpola i dati:

$$(-1, 0) \quad , \quad (0, 1) \quad , \quad (1, \alpha)$$

Esiste un solo elemento di P_1(R) che interpola i primi due dati: p(x) = x + 1. Questo elemento interpola anche il terzo dato se e solo se alfa = 2.

Alternativamente: il grafico di un elemento di P_1(R) è una retta (non verticale). Rappresentando i dati su un piano cartesiano si osserva che i tre dati sono allineati se e solo se alfa = 2.

Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$F(x) = x_1^2 + (2x_3 - 1)^2 + (x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2$$

Determinare una matrice A ed una colonna b tali che:

$$F(x) = \| Ax - b \|_2^2$$

Per ogni x = [x(1); x(2); x(3)] in R^3, F(x) è la norma due al quadrato della colonna di R^4 di componenti

x(1) , 2 x(3) - 1 , x(1) - 2 x(2) , x(2)

Allora (notazione di Scilab):

A = [1, 0, 0; 0, 0, 2; 1, -2, 0; 0, 1, 0] , b = [0; 1; 0; 0]