Test di Calcolo Numerico del 28 gennaio 2022

Test di ammissione alla prova orale

L'indirizzo email della persona che ha risposto (**maurizio.ciampa@unipi.it**) è stato registrato quando hai inviato questo modulo.

Siano $M = F(3,4)$ e σ, π le funzioni successore e predecessore in M. Determinare $\sigma(1)$ e $\pi(1)$.

L'elemento 1 è in M, infatti:

1 = 3^1 * 0,1000   (è il più piccolo elemento positivo con esponente 1)

Allora:

succ(1) = 3^1 * 0,1001   e   pred(1) = 3^0 * 0,2222

Sia:

$$h(x) = x^3$$

Determinare i punti uniti della funzione h e, per ciscuno di essi, decidere se il metodo iterativo definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione.

I punti uniti di h(x) sono le soluzioni dell'equazione x = h(x). In questo caso si hanno tre punti uniti:

a1 = 0   ,   a2 = -1   ,   a3 = 1

Il metodo iterativo definito da una funzione regolare H è utilizzabile per approssimare un punto unito y se e solo se |H'(y)| < 1. Per il metodo in esame si ha:

h'(x) = 3 x^2

e quindi il metodo risulta UTILIZZABILE per approssimare a1 (|h'(a1)| = 0 < 1), NON utilizzabile per approssimare a2 e a3 (|h'(a2)| = |h'(a3)| = 3 > 1).

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Determinare $\mathrm{EGP}(A)$.

Si ha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Dunque: EGP(A) = (S, D, P) con

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad P = I$$

Determinare due elementi distinti di $P_2(\mathbb{R})$ che interpolano i dati:

$$(0,0) \quad , \quad (1,0)$$

Si richiede di determinare due polinomi di grado al più due, con zeri 0 e 1. Ad esempio:

$$p1(x) = 0 \quad , \quad p2(x) = x\,(x-1)$$

Determinare le soluzioni nel senso dei minimi quadrati del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La soluzione nel senso dei minimi quadrati (l'unicità è conseguenza dell'indipendenza lineare delle colonne della matrice del sistema) si ottiene risolvendo il sistema delle equazioni normali:

```
[1  0  1]  [ 1 ]  x  =  [1  0  1]  [ 2 ]
           [ 0 ]                   [ 0 ]
           [ 1 ]                   [ 0 ]
```

ovvero:

2 x = 2

Dunque, l'unica soluzione nel senso dei minimi quadrati è: x* = 1.