Test di Calcolo Numerico del 13 gennaio 2022

Test di ammissione alla prova orale

L'indirizzo email della persona che ha risposto (**maurizio.ciampa@unipi.it**) è stato registrato quando hai inviato questo modulo.

Siano $M = F(2, 5)$ e

$$A = \{\, x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \mathrm{rd}(x) = 2 \,\}$$

Determinare $\sup A$.

Posto s = (pred(2) + 2)/2 e S = (2 + succ(2))/2 , si ha (a seconda se si utilizza la modalità RTTE o quella RTTA):

A = [s,S] oppure A = [s, S)

In entrambi i casi:

sup A = S = 2^2 x 0.100001 = 33/16

Sia:

$$f(x) = x^3 - 2$$

e si consideri il metodo di Newton applicato ad $f(x)$.

Indicare $y \in \mathbb{R}$ a partire dal quale il metodo *genera* una successione convergente all'unico zero di $f(x)$, e $w \in \mathbb{R}$ a partire dal quale il metodo *non genera* una successione convergente all'unico zero di $f(x)$.

Per ogni x > 0 si ha:

f'(x) = 3 x^2 > 0 e f"(x) = 6 x > 0

Inoltre:

f(0) = -2 < 0 e f(2) = 6 > 0

Allora, per il criterio di scelta del punto iniziale per il metodo di Newton, a partire da y = 6 il metodo GENERA una successione convergente all'unico zero di f(x).
Inoltre, essendo f'(0) = 0, il metodo NON GENERA una successione convergente a partire da w = 0.

Siano $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $b, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$. Indicare il numero di somme, prodotti, divisioni e contronti da effettuare per decidere se $\hat{x}$ è soluzione del sistema $Ax = b$.

Per decidere se x^ è soluzione di Ax = b occorre calcolare la colonna Ax^ e decidere se le sue componenti sono uguali a quelle della colonna b.

Il calcolo di Ax^ richiede: n [n P + (n-1) S] = n^2 P + (n^2 - n) S. Al computo vanno aggiunti n confronti.

Si considerino i dati:

$$(-1, 1) \quad , \quad (0, 1) \quad , \quad (1, 0) \quad , \quad (2, 0)$$

Indicare il sistema da risolvere per ottenere la forma di Newton dell'elemento di $P_3(\mathbb{R})$ che interpola i dati.

Il sistema da risolvere è:

```
[ 1  0  0  0 ] [ b0 ]     [ 1 ]
[ 1  1  0  0 ] [ b1 ]     [ 1 ]
[ 1  2  2  0 ] [ b2 ]  =  [ 0 ]
[ 1  3  6  6 ] [ b3 ]     [ 0 ]
```

Siano

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

una fattorizzazione QR di $A \in \mathbb{R}^{4\times 2}$.

Determinare tutte le soluzioni del sistema $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati.

La matrice T è invertibile, dunque le colonne di A sono linearmente indipendenti. Allora le soluzioni di Ax = b nel senso dei minimi quadrati sono le soluzioni di:

T x = U^T b

ovvero:

SI(T, U^T b) = (1/2 , 0)^T