Test di Calcolo Numerico del 17 settembre 2021

Test di ammissione alla prova orale

L'indirizzo email della persona che ha risposto (**maurizio.ciampa@unipi.it**) è stato registrato quando hai inviato questo modulo.

Siano $M = F(2, 53)$ e $x = \sqrt{2}$. Indicare, giustificando la risposta, quale tra

$$\alpha = \mathrm{rd}(x) \quad , \quad \beta = \sigma\big(\mathrm{rd}(x)\big) \quad , \quad \gamma = \pi\big(\mathrm{rd}(x)\big)$$

è più vicino ad x.

Essendo x irrazionale, per definizione l'elemento di M più vicino a x è alfa = rd(x).

Sia

$$h(x) = (x-2)^3 + 2$$

Determinare i punti uniti di h e, per ciascuno di essi, se il metodo iterativo ad un punto definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione del punto unito.

I punti uniti di h(x) sono 1, 2 e 3. Essendo

h'(x) = 3 (x - 2)^2

si ha:

h'(1) = 3 , h'(2) = 0 , h'(3) = 3

Quindi il metodo è utilizzabile per approssimare il punto unito 2, non utilizzabile per gli altri.

Sia $A : [-1, 2] \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ la funzione definita da

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

Indicare per quale valore di $\alpha \in [-1, 2]$ è massima la quantità $\|A(\alpha)\|_1$.

Si ha:

|| A(a) ||_1 = max(1 + |a| , 2 + |a|) = 2 + |a|

Allora, il massimo valore della norma uno di A(a) si ottiene per a = 2.

Per determinare la forma di Vandermonde di un polinomio interpolante, si risolve il sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Indicare i dati interpolati dal polinomio e poi il grado del polinomio interpolante.

Le ascisse dei dati da interpolare sono le componenti della seconda colonna della matrice, e le ordinate le componenti della colonna termine noto. Allora i dati sono:

(-1 , 1) , (0 , 1) , (1 , 0)

Una rappresentazione grafica dei dati mostra che il polinomio interpolante ha grado 2. Si osservi dalla dimensione della matrice si può solo dedurre il grado MASSIMO del polinomio.

Determinare l'elemento di $P_1(\mathbb{R})$ che meglio approssima i dati

$$(0, 1) \quad , \quad (1, 1) \quad , \quad (2, 1)$$

nel senso dei minimi quadrati.

Rappresentando i dati su un piano cartesiano ci si accorge che sono tre punti allineati a quota 1. Allora il polinomio P(x) = 1 l'unico elemento di P_1(R) che interpola i dati. Il polinomio interpolante ha scarto quadratico zero, quindi è l'elemento che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati.