Test di Calcolo Numerico del 29 luglio 2021

Test di ammissione alla prova orale

L'indirizzo email della persona che ha risposto (**maurizio.ciampa@unipi.it**) è stato registrato quando hai inviato questo modulo.

Determinare un numero intero p tale che: $p \notin F(2,5)$.

Tutti gli interi positivi che hanno una scrittura posizionale in base due di lunghezza 5 sono in F(2,5). Il primo intero che ha una scrittura di lunghezza 6 è 100000 = 2^5 ed è in F(2,5). L'intero successivo, 2^5 + 1 = 33, ha frazione, in base due: 0,100001 e quindi, non essendo compatibile con la precisione, non fa parte di F(2,5).

Siano x_k una successione, γ ed α numeri reali tali che:

$$x_0 = \gamma \quad , \quad x_{k+1} = x_k^2 - e^{x_k} - 2 \quad , \quad k = 1, 2, \ldots$$

e

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \alpha$$

Indicare una funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che: α è zero di F.

alfa è punto unito della funzione continua

h(x) = x^2 - exp(x) - 2

e quindi è zero, ad esempio, di

f(x) = x - h(x) = x - x^2 + exp(x) + 2

Siano A, P, Q, R matrici $n \times n$ ad elementi reali tali che:

a) P è di permutazione
b) Q è ortogonale
c) R è triangolare inferiore
d) $A = PQR$

Indicare un procedimento che, data una colonna b di n numeri reali, utilizza la fattorizzazione data di A per determinare la soluzione del sistema $Ax = b$.

Il sistema A x = b si riscrive

PQR x = b

Allora:

QR x = P^T b , R x = Q^T P^T b

R è invertibile se e solo se tutti gli elementi sulla diagonale principale sono diversi da zero.
In tal caso, essendo R triangolare inferiore, si ottiene l'unica soluzione:

x = SI(Q^T P^T b)

Indicare la forma di Newton del polinomio di grado minimo che interpola i dati:

$$(0, 1) \quad , \quad (1, 1) \quad , \quad (-1, 0)$$

La base di Newton relativa ai dati nell'ordine assegnato è: 1 , x , x(x-1). Allora il sistema che traduce le condizioni di interpolazione è:

(1 0 0) (1)
(1 1 0) c = (1)
(1 -1 2) (0)

La procedura di sostituzione all'indietro fornisce la soluzione del sistema: c = (1, 0, -1/2)^T.
Allora la forma di Newton del polinomio richiesto è:

p(x) = 1 - (1/2) x (x - 1)

Siano:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

una fattosizzazione QR di una matrice A, e sia $b = (0, 0, 1)^{\mathsf{T}}$ una colonna.

Determinare la soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema $Ax = b$.

La soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema A x = b si ottiene dalle equazioni normali, equivalenti al sistema:

(1   2) c = (0   1   0) (0)
(0   1)   (1   0   0) (0)
                                      (1)

la cui unica soluzione è: c = (0, 0)^T.