Test di Calcolo Numerico del 17 febbraio 2021

Test di ammissione alla prova orale

L'indirizzo email della persona che ha risposto (**maurizio.ciampa@unipi.it**) è stato registrato quando hai inviato questo modulo.

Siano $M = F(2,4)$ e $\xi = 2^{-4} \cdot 0.1000 \in M$. Determinare l'elemento di M, diverso da ξ, più vicino a ξ.

Poiché xi è il più piccolo elemento positivo di M con esponente -4, l'elemento più vicino è il predecessore di xi, l'elemento positivo più grande con esponente -5:

predecessore(xi) = 2^(-5) 0.1111

Determinare tutti gli elementi $h(x) \in P_2(\mathbb{R})$ tali che:

a) 0 è punto unito di $h(x)$;

b) -1 è punto unito di $h(x)$;

c) l'ordine di convergenza del metodo iterativo definito da $h(x)$ quando utilizzato per approssimare il punto unito -1 è *maggiore di uno*.

Si stanno cercando tutti i polinomi h(x) a coefficienti reali di grado al più 2 che verificano le condizioni:

h(0) = 0 , h(-1) = -1 , h'(-1) = 0

Scelta 1 , x , x(x+1) come base di P_2(R), i coefficienti dei polinomi cercati si ottengono come soluzioni del sistema:

(1   0   0)   (0)
(1 -1   0) c = (-1)
(0   1 -1)   (0)

Il sistema ha una sola soluzione: c = (0 , 1 , 1)^T, quindi l'unico elemento che verifica le condizioni è:

p(x) = x + x(x+1) = x^2 + 2 x

Siano A, S, D, P matrici ad elementi reali di ordine 3×3 tali che:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $(S, D, P) = \mathrm{EGP}(A)$.

Determinare la matrice P.

Poiché, per il legame stabilito dalla procedura EGP si ha: PA = SD, e

(1 -1 0)
SD = (1 0 0)
(1 1 1)

allora necessariamente:

(0 0 1)
P = (1 0 0)
(0 1 0)

Siano x_1, y_1, x_2, y_2 numeri reali. Per determinare la forma di Newton dell'elemento di $P_2(\mathbb{R})$ che interpola i dati:

$$(1, 0) \quad , \quad (x_1, y_1) \quad , \quad (x_2, y_2)$$

si risolve il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Determinare il valore di x_1, y_1, x_2, y_2.

La base di Newton relativa ai dati nell'ordine assegnato è:

1 , x - 1 , (x-1)(x - x_1)

ed il sistema da risolvere si scrive:

(1 0 0) (0)
(1 x_1 - 1 0) c = (y_1)
(1 x_2 - 1 (x_2 - 1)(x_2 - x_1)) (y_2)

Confrontando con il sistema assegnato si ottiene:

x_1 = 3 , x_2 = 0 ; y_1 = y_2 = 1

Determinare l'elemento $f(x) \in \text{span}\{\, x, |x-1|\,\}$ che meglio approssima i dati:

$$(-1,1) \quad , \quad (0,1) \quad , \quad (2,-1)$$

nel senso dei minimi quadrati.

Il sistema che traduce le condizioni di interpolazione è:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

I coefficienti della combinazione lineare cercata sono le componenti del sistema indicato nel senso dei minimi quadrati. Risolvendo le equazioni normali

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

si ottiene: c = (-3/5, 1/3)^T. L'elemento cercato è allora:

$$f(x) = (-3/5)\, x + (1/3)\, |x - 1|$$