Test di Calcolo Numerico del 27 gennaio 2021

Test di ammissione alla prova orale

L'indirizzo email della persona che ha risposto (**maurizio.ciampa@unipi.it**) è stato registrato quando hai inviato questo modulo.

Sia $M = F(2,2)$. Determinare:

$$y = 1 \oslash 3 \quad \text{e poi} \quad x = 3 \otimes y$$

Si ha:

y = rd(1/3) = rd(2^(-1) 0,101010 ...) = 2^(-1) 0,11

e poi:

x = rd(3 y) = rd(2^(-1) 0,1001) = 1

Sia x_k la successione di numeri reali determinata applicando il metodo di bisezione alla funzione

$$f(x) = x(x-1)$$

sull'intervallo $[\frac{1}{2}, 3]$. Determinare:

$$z = \lim_{k \to \infty} x_k$$

Nell'intervallo [1/2 , 3] la funzione f(x) ha un solo zero: a = 1. In tale intervallo la funzione è continua e f(1/2) f(3) < 0. Quindi:

z = lim x_k = 1

Sia U, T una fattorizzazione QR della matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \\ 1 & a_{23} \end{bmatrix}$$

Indicare le dimensioni dei fattori U e T, e poi il valore di t_{11}.

Il fattore U è una matrice 3 x 2, come A, ed il fattore T è una matrice 2 x 2. Dalla relazione

A = U T

letta per colonne, si ottiene poi, dette a_k le colonne di A e u_k quelle di U:

a_1 = t_11 q_1

Passando alle norme:

|| a_1 || = | t_11 | || q_1 || da cui | t_11 | = || a_1 || = sqrt(2)

Il segno di t_11 non è determinato in modo univoco. Se la fattorizzazione è ottenuta con la procedura GS, gli elementi sulla diagonale del fattore T sono positivi dunque, in tal caso:

t_11 = sqrt(2)

Determinare la forma di Newton del polinomio interpolante relativo ai dati:

$$(-1, 0) \quad , \quad (0, 1) \quad , \quad (1, 1)$$

La base di Newton in questo caso è: 1, x + 1, (x + 1) x. Il sistema che traduce le condizioni di interpolazione è:

```
(1  0  0)        (0)
(1  1  0)  c  =  (1)
(1  2  2)        (1)
```

che ha come unica soluzione c = (0, 1, -1/2)^T. L'unico elemento che interpola i dati, in forma di Newton è quindi:

p(x) = (x + 1) - (1/2) (x + 1) x

Determinare l'elemento $f(x) \in \text{span}\{ x^2 \}$ che meglio approssima i dati:

$$(-1,1) \quad , \quad (0,0) \quad , \quad (1,2) \quad , \quad (2,3)$$

nel senso dei minimi quadrati.

Il sistema che traduce le condizioni di interpolazione è:

(1) (1)
(0) (0)
(1) c = (2)
(4) (3)

la cui soluzione nel senso dei minimi quadrati è: c = 15/18 = 5/6. L'elemento cercato è allora:

f(x) = (5/6) x^2