Test di Calcolo Numerico dell'11 gennaio 2021

Test di ammissione alla prova orale

L'indirizzo email della persona che ha risposto (**maurizio.ciampa@unipi.it**) è stato registrato all'invio del modulo.

Dato un numero intero $m \geqslant 1$, sia $M = F(2, m)$. Determinare il minimo valore di m tale che: *per ogni* $x \in [1, 128]$, *detto* $\delta(x)$ *l'errore assoluto commesso approssimando* x *con* $\mathrm{rd}(x)$, *si abbia* $|\,\delta(x)\,| \leqslant 2^{-10}$.

Per l'errore assoluto d(x) commesso approssimando x > 0 con l'arrotondato rd(x) in F(B,m) si ha, detto b l'esponente di x in base B:

| d(x) | <= 1/2 * B^(b - m)

Poiché per ogni m si ha: rd(128) = 128, e quindi d(128) = 0, allora,
essendo 8 l'esponente di 128 in base due, si ha:
(1) il massimo valore dell'esponente in base 2 di x in [1, 128) è 7, e
(2) max | d(x) | = 1/2 * 2^(7 - m) = 2^(6 - m)
Inoltre:

2^(6 - m) <= 2^(-10) <=> m >= 16

Quindi il valore minimo di m è 16.

Sia $h(x) = \frac{1}{3}\cos x$. Determinare il numero di punti uniti di h e separarli. Per ciascuno di essi, decidere se il metodo iterativo ad un punto definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione.

La funzione ha un solo punto unito, separato dall'intervallo [0,1]. Poiché

per ogni x in [0,1] si ha: | h'(x) | = | sen x | / 3 < 1/3 < 1

il metodo è utilizzabile per approssimare il punto unito.

Siano $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $v, w \in \mathbb{R}^n$. Determinare il numero di moltiplicazioni ed il numero di somme necessari per calcolare $v^\mathsf{T} M w \in \mathbb{R}$.

Per calcolare z = Mw sono necessarie:
n^2 moltiplicazioni , n (n - 1) somme;
per calcolare v^T z sono necessarie:
n moltiplicazioni , n - 1 somme.
In totale:
n^2 + n moltiplicazioni , (n + 1)(n - 1) = n^2 - 1 somme.

Determinare tutti gli elementi di

$$\mathrm{span}\{\, 1, 1 + x, x(1 + x)2^{-x} \,\}$$

che interpolano i dati:

$$(-1, 0) \quad , \quad (0, -1) \quad , \quad (1, 0)$$

Il sistema che traduce le condizioni di interpolazione è:
(1 0 0) (0)
(1 1 0) c = (-1)
(1 2 1) (0)
che ha come unica soluzione: c = (0, -1, 2)^T , e quindi l'unico elemento che interpola i dati è:
f(x) = - (1 + x) + 2 x (1 + x) 2^(-x)

Determinare la soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Utilizzando le equazioni normali si ottiene una sola soluzione nel senso dei minimi quadrati: x* = (1, 0)^T .