Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 24 febbraio 2020

Problema 1

Sia $M = F(2,4)$. Determinare l'errore relativo commesso approssimando $5/7$ con $5 \oslash 7$.

Problema 2

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Determinare $\mathrm{EGPP}(A)$.

Problema 3

Siano: $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2$ istanti di campionamento in $I = [0,2]$ e c la funzione di campionamento agli istanti assegnati. Determinare gli elementi $f \in P_2(\mathbb{R})$ tali che:

$$c(f) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione

Problema 1

Sia $5 = 2^3 \cdot 0.101$ che $7 = 2^3 \cdot 0.111$ sono elementi di $F(2,4)$. Dunque l'operazione $5 \oslash 7$ è definita.

Poiché $\frac{1}{2} < 5/7 \leqslant 1$, l'esponente di $5/7$ in base due è 0 e la frazione g vale $5/7$. Con un procedimento usuale si ottiene poi la scrittura posizionale in base due di g:

$$g = 0.\overline{101}$$

Gli elementi adiacenti a $5/7$ in $F(2,4)$ sono allora:

$$\xi_- = 2^0 \cdot 0.1011 \quad \text{e} \quad \xi_+ = 2^0 \cdot 0.1100$$

Il punto medio del segmento di estremi ξ_- e ξ_+ è: $m = 2^0 \cdot 0.10111 > 5/7$. Dunque si ha:

$$5 \oslash 7 = \mathrm{rd}(5/7) = 2^0 \cdot 0.1011 = 11/16$$

Infine, l'errore relativo commesso approssimando $5/7$ con $\mathrm{rd}(5/7)$ è:

$$\epsilon = \frac{\mathrm{rd}(5/7) - 5/7}{5/7} = -\tfrac{3}{80}$$

Problema 2

Eseguendo il primo passo della procedura EGPP si ottiene (notazioni usuali):

$$P_1 = P_{13} \quad , \quad H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Dal secondo passo:

$$P_2 = P_{23} \quad , \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A_3 = D = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Infine:

$$P = P_{23}P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e:

$$S = P(P_1^{\mathsf{T}} H_1^{-1} P_2^{\mathsf{T}} H_2^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Problema 3

Il problema consiste nel determinare gli elementi di $P_2(\mathbb{R})$ che interpolano i dati:

$$(0,1) \quad , \quad (1,0) \quad , \quad (2,1)$$

La base di Newton relativa agli istanti t_0, t_1, t_2 è costituita dai tre polinomi: $1, t, t(t-1)$. Il sistema da risolvere per determinare i polinomi cercati, in forma di Newton, è:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

la cui unica soluzione è $b_0 = 1, b_1 = -1, b_2 = 1$. Dunque, un solo elemento di $P_2(\mathbb{R})$ interpola i dati (come era ovvio):

$$P(t) = 1 - t + t(t-1) = 1 - 2t + t^2$$